Activités Numériques **1A secondaire** **SAI.Fethi**

Exercice 1

1) Montrer que : $\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ et $\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2$.
2) Soit $A=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}+\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$ Montrer que : A=3.

Exercice 2

Soient $E=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ et $F=2+\sqrt{27}-\sqrt{12}$.

1) Simplifier E et F puis montrer que E et F sont des inverses.
2) En déduire que $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}-\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$ et $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=5+3\sqrt{3}$.

Exercice 3

On considère les réels suivants :

$$A=\sqrt{13+4\sqrt{3}}-\sqrt{13-4\sqrt{3}} \text{ et } B=\sqrt{12+2\sqrt{11}}-\sqrt{12-2\sqrt{11}}$$

Montrer que : A=B.

Exercice 4

Simplifier : $E=(5\sqrt{18}-3\sqrt{32}+\sqrt{50})^2$.

Exercice 5

1) Soient a et b deux réels strictement positifs, Montrer que : $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\sqrt{ab}\leq\dfrac{a+b}{2}$.
2) Soient a et b deux réels strictement positifs, Montrer que : $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$.

Exercice 6

Soient $A=5+2\sqrt{6}$ et $B=5-2\sqrt{6}$.

1) Ecrire A sous la forme $(a+b)^2$ et B sous la forme $(a-b)^2$.
2) Ecrire sans radical au dénominateur le réel $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.
3) En déduire que : $\dfrac{A}{B}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^4$

Exercice 7

Pour tout réel x, on considère l'expression : $A=3\left|x-\sqrt{3}\right|-2\left|-x+\sqrt{3}\right|-x-\sqrt{3}+3$.

1) Calculer A pour $x=1-\sqrt{3}$ et $x=\pi$.
2) Simplifier A lorsque x est un réel négatif.

Exercice 8

On considère l'équation :

$$\text{(E): } x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}\ ,\ x\neq 0\ .$$

1) Soit y une solution de (E) , calculer $A=y^2+\dfrac{1}{y^2}$.

2) a) Montrer que le réel $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est une solution de (E).

b) En déduire la valeur du réel $B=(\frac{2}{1+\sqrt{5}})^2+(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2$.

Exercice 9

Montrer que, si x et y sont deux réels appartenant à $]-1,1[$, alors $\frac{x+y}{1+xy}\in\,]-1,1[$.

Exercice 10

Soit n$\in\mathbb{N}^*$.

1) Montrer que : $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\prec\frac{1}{2\sqrt{n}}$ et $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\prec\frac{1}{2\sqrt{n}}$.
2) Comparer : $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ et $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.
3) Pour quelles valeurs de n a-t-on : $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\prec\frac{1}{10}$?

Exercice 11

Soit un réel x vérifiant :

$$-3\prec x\prec\frac{1}{2}.$$

1) Donner un encadrement de x^2-1.
2) Montrer que $x+5\neq 0$.
3) Soit $A=\frac{2x}{x+5}$.
   a) Montrer que $A=2-\frac{10}{x+5}$
   b) En déduire un encadrement de A.

Exercice 12

On donne $A=\frac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n-1})^2}$; $n\in\mathbb{N}$.

1) Calculer A pour n=0,n=1 et n=2.
2) Montrer que A=192 $\forall n\in\mathbb{N}$.

Exercice 13

1) Calculer, pour tout $n\geq 2$: $A=(1-\frac{1}{n-1})(1-\frac{1}{n})$.
2) Calculer B= $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})$.
3) Calculer C= $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})...(1-\frac{1}{n^2})$.