Exercices 3A EG Sai Fethi

Exercice : 1

Soit la fonction f définie sur IR $\setminus\{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+2x+5}{x+1}.$$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1) Montrer que I (-1,0) est un centre de symétrie de (C).
2)
   a) Trouver trois réels a, b, c tel que f(x) = a x + b + $\frac{c}{x+1}$.

   b) Interpréter géométriquement le résultat.

   c) Etudier les variations de f et la représenter graphiquement
3) Soit g(x) = $\frac{1}{2}$ f(x). Dresser le tableau de variation de g et

   représenter sa courbe Γ dans le même repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie par f(x) = $\frac{x^2+3x+3}{x+1}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1- Etudier les variations de f

2- Préciser la nature des branches infinies.

3- Représenter C.

Exercice 3:

Soit la fonction f définie par f (x) = $\frac{\cos 2x}{(1+\sin x)^2}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1- Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2- a) Montrer que la droite Δ d'équation : $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de C.

b) En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $D_E = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

3- a) Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{-2\cos x(1+2\sin x)}{(1+\sin x)^3}$

b) Dresser le tableau de variation de la restriction f à D_E

4- a) Calculer $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

b) Tracer la partie de C relative à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$

Exercice 4 :

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ et on note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1- a) Donner la période de f.

b) Montrer que la droite d'équation $x = \frac{7\pi}{6}$ est un axe de symétrie de C.

c) Déterminer le point d'inflexion I de (ξ) dont l'abscisse est un élément de $\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$.

d) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à C en I.

e) Monter que I est un centre de symétrie de C.

2- Dresser le tableau de variation de la restriction de f à $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ puis construire C.

Exercice 5 :

Une urne contient quatre jetons blancs portant les chiffres 1 , 2 , 2 ,3 et trois jetons rouges portant les chiffres 1 , 2 , 2 et cinq jetons noirs portant les chiffres 1 , 1 ,2 ,2 , 3.
On tire successivement et sans remise 4 jetons de l'urne.
Calculer la probabilité des événements suivants :
A : Les 4 jetons tirés portent le même chiffre
B : Tirer 2 jetons blancs, 1 jeton rouge et 1 jeton noir
C : parmi les 4 jetons tirés on doit avoir exactement deux jetons rouges et deux jetons portant le chiffre 1
D : Tirer 4 jetons dont la somme des chiffres égale à 6.

Exercice 6 :

Un enfant à six billes : 3 rouges, 2 blanches et 1 verte, il met les 6 billes une par une dans 3 trous : t_1 , t_2 , t_3 (un trou peut contenir de 0 à 6 billes) .

1- On désigne par A l'événement « le trou t_1 reste vide » Montrer que P (A) = 64/729
2- Calculer la probabilité des événements suivants
B : « t_1 contient exactement 4 billes. »
C : « les 3 billes rouges se trouvent dans le trou t_1 »
D : « Les 3 billes rouges se trouvent dans 3 trous différents. »

Exercice 7 :

Une urne U contient dix boules :
Six blanches numérotées 1 , 2 , 3, 4 ,5 , 6
Quatre noires numérotées 7 , 8 , 9 , 10

1- On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne. Calculer le probabilité des événements suivants :
A : « les 3 boules sont de deux couleurs »
B : « les 3 boules contiennent au moins une blanche »
C : « il y a exactement une blanche et deux numéro pairs »
2- On tire successivement et avec remise deux boules de U. Calculer la probabilité des événements suivants :
E : « obtenir deux boules de couleurs différentes »
F : « la valeur absolue de la différence des 2 numéro est 4 »
G : $E \cup F$
H : « la somme des 2 numéros est strictement supérieure à 5. »

Exercice 8 :

Une boite contient 8 jetons; un de forme triangulaire et de couleur rouge, deux de formes triangulaires et de couleurs vertes et cinq de formes rectangulaires et de couleurs rouges.
On tire simultanément 2 jetons de la boite et on suppose que les tirages sont équiprobable.

1- Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « Les 2 jetons obtenus sont de même couleur. »
B : « Les 2 jetons obtenus sont de même forme »

2- Définir les événements $A \cap B$ et $A \cup B$ puis calculer leurs probabilités.

Exercice 9:

Une urne contient 3 boules bleues, deux boules vertes et 5 boules rouges. On suppose tous les tirages sont équiprobables.

1- On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A_1 : « Les 3 boules tirées sont de même couleur »
A_2 : « Les 3 boules tirées sont de couleurs différentes »
A_3 : « Deux boules au moins sont de même couleur. »

2- On tire 3 boules de l'urne, l'une après l'autre, en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « la première boule tirée est verte, la deuxième est rouge et la troisième est bleue. »
B : « obtenir une boule verte pour la première fois au $2^{éme}$ tirage. »
C : « obtenir deux boules bleues et deux seulement. »

Exercice 10 :

Une urne contient 3 boules noires et 4 boules rouges. On tire simultanément deux boules de l'urne.
On suppose que les tirages sont équiprobables.
Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « avoir une boule noire et une boule rouge »
B : « avoir deux boules noires. »
C : « avoir deux boules de même couleur. »

Exercice 11 :

Un sac contient quatre boules rouges numérotées 1, 1, 1, 2 trois boules noires numérotées 1, 2, 2 et trois boules blanches numérotées 1, 1, 2. Un joueur tire successivement et sans remise 3 boules du sac.

1- Combien y a-t-il de tirage possible ?

2- Combien y a-t-il de tirages :

a) Contenant deux boules portant le n°1 et une boule portant le n°2.

b) Contenant trois boules tricolores.

c) Contenant deux boules portant le n°1 et une boule blanche.

Exercice 12:

A] Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x+2}$ de courbe (C) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$.

2) Déduire les équations des asymptotes à (C).

3) Etudier les variations de f et tracer (C).

4)a) Utiliser (C) pour déterminer le nombre de solutions de l'équation :

(E) : $x^2 + (1 - m)x - 1 - 2m = 0$ où m est paramètre réel .

b) Dans le cas où la droite Δ_m : y = m coupe (C) en deux points M' et M, d'abscisses x' et x'' tel que :

x' < x'' et coupe les deux asymptotes verticales et obliques respectivement en P et Q ; Montrer que

$\overline{PM'}.\overline{QM'}$ est une constante que l'on déterminera .

B]

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto |x|-1-\frac{1}{|x|+2}$$

1) Etudier la parité de g.

2) Etudier la dérivabilité de g à droite en 0.

3) Sans étudier les variations de g ; construire sa courbe (C') dans le même repère que (C) en le justifiant.

Exercice 13

Soit m ∈ ℝ *, on définit $f_m(x) = \dfrac{x^2 + mx - m^2}{x - m}$.

I/ Pour m = 1 :

1) Ecrire $f_1(x) = = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$, où a, b et c sont des réels que l'on précisera.

2) Etudier les variations de f_1 (on cherchera les limites, les asymptotes, les extrémas)

3) Vérifier que le point Ω_1 l'intersection des asymptotes est un centre de symétrie pour (C1).

4) Tracer (C_1) dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\|$=2cm et $\|\vec{j}\|$=1cm.

5) En déduire les courbes des fonctions g et h telle que :

$$g(x) = \frac{x^2 + x - 1}{|x - 1|} \quad \text{et } h(x) = \frac{x^2}{x-1}.$$

II/ <u>Pour m ∈ IR*.</u>

<u>1)</u> Vérifier que $f_m(x) = x + 2m + \dfrac{m^2}{x-m}$, en déduire que les asymptotes obliques des courbes C_m de f_m ont une direction fixe.

2) Trouver les coordonnés du point Ω_m : intersection des asymptotes de (Cm), en déduire que Ωm varie sur une droite fixe Δ à déterminer.

3) Etudier suivant les valeurs de m, les variations de f_m (on distinguera les cas $m>0$ et $m<0$)

4) Soit I_m le point où Cm coupe l'axe (o,j) , que peut-on dire de la tangente en I_m quand m varie.

5) Soit J_m le point d'abscisse non nulle où f_m admet un extremum, montrer que J_m varie sur une droite fixe que l'on précisera.