Devoir de maison n°3 3 A SAI.Fethi

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé R = (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$) .

1° Soit f la fonction définie sur IR / { 1 } par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 1}$.

a – Etudier les variations de f .

b – Déterminer les réels a , b et c tels que : pour tout x ≠ 1 , on a : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.

c – Déterminer les asymptotes de la courbe C_f .

d – Construire la courbe C_f dans le repère R .

2°) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \text{tag}(\frac{\pi}{2}x) - \frac{4}{3}\sin(\pi x)$.

a – Déterminer le domaine de définition de g .

b – Montrer que g est périodique et de période 2 .

c – Montrer que les points $I_k(k, 0)$, k ∈ Z , sont des centres de symétrie de la courbe C_g .

d – Déduire que le domaine d'étude de g est [0 , 1 [et expliquer comment construire la courbe C_g sur l'intervalle] 1 , 2] .

3°) a – Montrer que $g'(x) = \dfrac{-\pi}{6\cos^2(\frac{\pi}{2}x)}(3 + 2\cos \pi x)(2\cos \pi x - 1)$.

b – Dresser le tableau de variation de g sur [0 , 1 [, puis construire la courbe C_g dans un autre figure du plan P rapporté au repère R .

c – Soit φ la fonction définie par : $\varphi(x) = -\text{cotg}(\frac{\pi}{2}x) + \frac{4}{3}\sin(\pi x)$.

Montrer que la courbe $C\varphi$ de la fonction φ se déduit de C_g par une translation qu'on précisera .

4°) soit h la fonction définie sur IR par :

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x}{x - 1} & pour\ x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]2, +\infty\right[\\ g(x) & pour\ x \in [0, 2] \end{cases}$$

a – Etudier la continuité et la dérivabilité de h en 0 et en 2 .

b – Construire la courbe C_h dans une autre figure .

c – Déduire dans le même figure la construction de la courbe représentative de la fonction k définie par :

$k(x) = h(|x|)$.