

L.S.B.Amri	Devoir de synthèse N°1	Sai Fethi
3 SC	Mathématiques 2^H	14/12/2005

Exercice 1: (6 points)

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1} & \text{si } x > 0 \\ \frac{x^2+2}{x^2+1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- 1) Déterminer D_f : le domaine de définition de f .
- 2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$. f est-elle continue en 0 ?
- 3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 4) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$.

Exercice 2: (7 points)

- 1) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{3+4u_n}{6+u_n}.$$

$$\text{a) Montrer que pour tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 4 - \frac{21}{6+u_n}.$$

$$\text{b) Montrer par récurrence que : pour tout } n \in \mathbb{N} : -3 < u_n < 1.$$

- 2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{-1+u_n}{3+u_n}$.

$$\text{a) Montrer que la suite } (v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q = \frac{3}{7}.$$

$$\text{b) Exprimer } v_n \text{ puis } u_n \text{ en fonction de } n.$$

$$\text{c) Calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Exercice 3: (7 points)

$$1) \text{ Montrer que pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ on a : } \cos 3x - \sqrt{3} \sin 3x = 2 \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$2) \text{ Soit la fonction } f \text{ définie par : } f(x) = \cos 3x - \sqrt{3} \sin 3x - 2 \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\text{a) Calculer } f\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ et } f\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

$$\text{b) Montrer que pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ on a : } f(x) = -4 \cos 2x \times \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

$$3) \text{ Soit la fonction } g \text{ définie par : } g(x) = \frac{f(x)}{1-2\sin^2 x}$$

$$\text{a) Déterminer le domaine } D \text{ de définition de } g.$$

$$\text{b) Montrer que : pour tout } x \in D, \text{ on a : } g(x) = -4 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{c) Calculer } g\left(\frac{\pi}{12}\right) \text{ et en déduire } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right).$$