L.S.B.Amri	**Devoir de synthèse N°1**	**Sai Fethi**
3 SC	**Mathématiques 2H**	**8/12/2005**

Exercice 1: (7 points)

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - x\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1) Déterminer D_f : le domaine de définition de f.
2) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$. f est-elle continue en 0 ?
3) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
4) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Exercice 2: (8 points)

1) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 2 - \dfrac{3}{2+u_n}$.

b) Montrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 1$.

2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{-1+u_n}{1+u_n}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Exercice 3: (5 points)

Pour tout x réel on pose $f(x) = 2\cos^2 x + 2 \sin x \cos x$

1) Montrer que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = 1 + \sqrt{2}\sin(2x + \dfrac{\pi}{4})$.

2) Résoudre dans $[-\pi ; \pi]$ l'équation : $f(x) = 0$

3) Soit la fonction g définie par: $g(x) = \dfrac{f(x)}{2\cos(2x + \dfrac{\pi}{4}) - \sqrt{3}}$

a) Déterminer le domaine D de définition de g.
b) Montrer que : pour tout $x \in D$, on a $g(x + \pi) = g(x)$