Correction du devoir maison de mathématiques n°5

Exercice 1

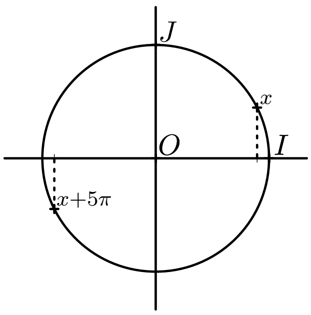
On fait apparaître un multiple de 2π pour se ramener à une valeur dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$:

$$\begin{array}{ccccccc}
\dfrac{15\pi}{2} & = & \dfrac{16\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2} & = & 4\times 2\pi-\dfrac{\pi}{2} & = & -\dfrac{\pi}{2}[2\pi] \\
\dfrac{34\pi}{7} & = & \dfrac{28\pi}{7}+\dfrac{6\pi}{7} & = & 2\times 2\pi+\dfrac{6\pi}{7} & = & \dfrac{6\pi}{7}[2\pi] \\
-\dfrac{65\pi}{3} & = & -\dfrac{66\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3} & = & -11\times 2\pi+\dfrac{\pi}{3} & = & \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \\
-\dfrac{73\pi}{6} & = & -\dfrac{72\pi}{6}-\dfrac{\pi}{6} & = & -6\times 2\pi-\dfrac{\pi}{6} & = & -\dfrac{\pi}{6}[2\pi] \\
\dfrac{2007\pi}{5} & = & \dfrac{2010\pi}{5}-\dfrac{3\pi}{5} & = & 201\times 2\pi-\dfrac{3\pi}{5} & = & -\dfrac{3\pi}{5}[2\pi]
\end{array}$$

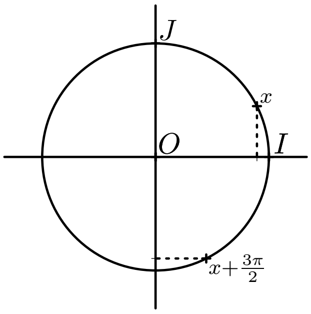
$$\begin{array}{lll}
-\dfrac{5\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}[2\pi] & \cos(-\dfrac{5\pi}{3})=\dfrac{1}{2} & \sin(-\dfrac{5\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\
\dfrac{7\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}[2\pi] & \cos(\dfrac{7\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \sin(\dfrac{7\pi}{4})=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\
\dfrac{19\pi}{6}=-\dfrac{5\pi}{6}[2\pi] & \cos(\dfrac{19\pi}{6})=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \sin(\dfrac{19\pi}{6})=-\dfrac{1}{2}
\end{array}$$

Exercice 2

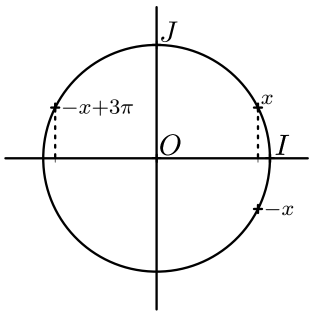
On utilise les symétries du cercle trigonométrique :



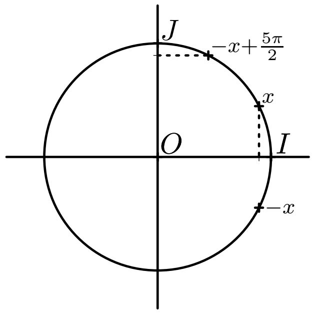
$\cos(5\pi+x)=-\cos(x)$



$\sin(\frac{3\pi}{2}+x)=-\cos(x)$



$\cos(3\pi-x)=-\cos(x)$



$\sin(\frac{5\pi}{2}-x)=\cos(x)$

Exercice 3

On utilise des tableaux de variations :

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$$

x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$	0				0
	$\searrow$				$\nearrow$
		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	
		$\searrow$		$\nearrow$	
			-1		

$$S = \{\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\}$$

$$-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$				1
			$\nearrow$	
			$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
		$\nearrow$		
		$-\frac{1}{2}$		
	$\nearrow$			
	-1			

$$S =]-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}[$$

Exercice 4

On pose $X = \cos x$ et $Y = \sin x$,

$$\begin{cases} L_1 & : & 2Y - 4X & = & \sqrt{3}+2 \\ L_2 & : & Y + \sqrt{3}X & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1 - 2L_2 & : & (-4-2\sqrt{3})X & = & \sqrt{3}+2 \\ L_2 & : & Y & = & -\sqrt{3}X \end{cases}$$

$$\begin{cases} X & = & \dfrac{\sqrt{3}+2}{-4-2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}+2}{-2(2+\sqrt{3})} = -\dfrac{1}{2} \\ \\ Y & = & -\sqrt{3} \times (-\dfrac{1}{2}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Donc $x = \frac{2\pi}{3}$.

Exercice 5

1. On utilise les formules $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

$$A(2\cos(\frac{3\pi}{2}); 2\sin(\frac{3\pi}{2})) \quad = \quad A(0; -2)$$

$$B(2\cos(-\frac{\pi}{4}); 2\sin(-\frac{\pi}{4})) \quad = \quad B(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$$

$$C(\frac{1}{2}\cos(\frac{11\pi}{6}); \frac{1}{2}\sin(\frac{11\pi}{6})) \quad = \quad C(\frac{\sqrt{3}}{4}; -\frac{1}{4})$$

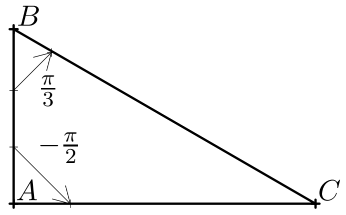
2. On utilise la formule $r = \sqrt{x^2+y^2}$ puis on factorise par r pour trouver l'angle θ.

$$D(3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}; 3\sqrt{2} \times (-\frac{\sqrt{2}}{2})) \quad \text{donc} \quad D(3\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4})$$

$$E(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}) \quad \text{donc} \quad E(1; \frac{2\pi}{3})$$

$$F(2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}; 2 \times \frac{1}{2}) \quad \text{donc} \quad F(2; \frac{\pi}{6})$$

Exercice 6



En utilisant la relation de Chasles :

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB})\ [2\pi]$$

Or $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v})\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \pi\ [2\pi]$, donc :

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \pi\ [2\pi]$$

Et finalement :

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \pi\ [2\pi] = -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$$

Exercice 7*

D'après l'exercice précédent : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \pi\ [2\pi]$.

Donc : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + \pi\ [2\pi]$.

En conclusion, pour tout triangle ABC : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \pi\ [2\pi]$.

Exercice 8*

1. $r = 3$, l'ensemble des points M est le cercle de centre O et de rayon 3.
2. $\theta = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, l'ensemble des points M est une demi-droite d'origine O faisant un angle de $\frac{\pi}{3}$ avec l'axe des abscisses $(O, \overrightarrow{i})$.
3. $r\cos\theta = 3$, l'ensemble des points M est la droite d'équation $x = 3$ en coordonnées cartésiennes.

Exercice 9**

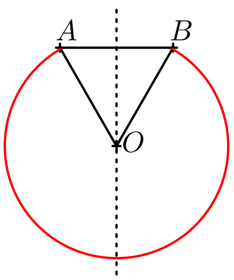
L'équation de ce cercle en coordonnées cartésiennes est :

$$IM^2 = 1 \quad \text{soit} \quad (x-1)^2 + y^2 = 1$$

D'où en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}
(r\cos\theta - 1)^2 + (r\sin\theta)^2 &= 1 \\
r^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta + 1 + r^2\sin^2\theta &= 1 \\
r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 2r\cos\theta &= 0 \\
r^2 - 2r\cos\theta &= 0 \\
r(r - 2\cos\theta) &= 0 \\
r - 2\cos\theta &= 0 \quad \text{(Le point } O \text{ est toujours solution)}
\end{aligned}$$

Exercice 10**



On construit dans un premier temps sur la médiatrice du segment $[AB]$ le point O verifiant $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2 \times (-\frac{\pi}{6})\ [2\pi] = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

En raison du théorème de l'angle inscrit, l'ensemble des points M cherchés est la portion du cercle de centre O passant par les points A et B située du côté du point O par rapport à la droite (AB).