

Exercice N 1

on donne la fonction

$$f : x \rightarrow \begin{cases} \frac{x|x-2|}{(x-2)(|x|+1)} \text{ si } x \neq 2 \\ f(2) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

- 1) Déterminer le domaine de continuité de f.
- 2) Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer la fonction dérivée de f.
- 3) Soit A le point de C_f d'abscisse -1.
 - a) Donner une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point A.
 - b) Existe-t-il un point B de C_f ou la tangente est parallèle à T ?

Exercice N 2

On donne les fonctions :

$$g : x \rightarrow -\frac{x^2}{x^2 - x - 2} \quad \text{et} \quad h : x \rightarrow \frac{x}{x - \sqrt{x-2}}$$

- 1) Déterminer les domaines de définition de g et h
- 2) Ecrire une équation cartésienne de la tangente à la courbe de g en son point d'abscisse 1.
- 3) Existe-t-il un point M de la courbe de g où la tangente passe par l'origine O du repère ?
- 4) Vérifier que pour tout réel $x \in D_g \cap D_h$ on a : $g'(x) = [h'(x^2)] \times 2x$

Exercice N 3

A/ Soit P un polynôme et $a \in \mathbb{R}$.

- 1) Montrer que s'il existe un polynôme Q tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-a)^2 Q(x),$$

alors $P'(a) = 0$.

- 2) Réciproquement : si le polynôme P vérifie : $P(a) = P'(a) = 0$, montrer que P(x) est factorisable par $(x-a)^2$.

Application

- a) Montrer que : $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12$ est factorisable par $(x-2)^2$. Le factoriser complètement.
- b) Soit P un polynôme de degré 3 admettant 3 racines distinctes x_1, x_2 et x_3 .
 - i) Contrôler à l'aide de ce qui précède que P' ne s'annule ni en x_1 , ni en x_2 , ni en x_3 .
 - ii) Montrer que : $\frac{x_1}{P'(x_1)} + \frac{x_2}{P'(x_2)} + \frac{x_3}{P'(x_3)} = 0$

B/ Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que le polynôme $x^3 + px + q$ soit tel que :

- 1) Le polynôme dérivé admette des racines.

- 2) Le polynôme et le polynôme dérivé admettent une racine commune.

Exercice N 4

Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{x-1} \text{ si } x \in]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[\\ \frac{1}{2}x^2 - x + 1, \text{ si } x \in [0, 3[\end{cases}$$

- 1) f est-elle continue en 0 ?
- 2) f est-elle dérivable en 0 ?
- 3) Ecrire une équation de la tangente à la courbe de f au point A(0,1).
- 4) Déterminer le signe de $f(x) - (-x+1)$ dans chacun des intervalles : $[-1, 0[$ et $[0, 1[$.
- 5) f est-elle dérivable en 3 ?
Interpréter graphiquement le résultat.
- 6) Déterminer $f'(x)$ pour $x \in]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$ et pour $x \in]0, 3[$
- 7) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$: $2f'(x) + (x-1)f''(x) = 0$.

Exercice N 5 Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$

Déterminer a, b et c pour que la courbe de f passe par

les points $A(1, \frac{3}{2}), B(-1, -\frac{5}{2})$ et tangente à la droite

$$D : 2x - 2y - 3 = 0.$$

Exercice N 6 Soit la fonction $f(x) = x^2(3-x)$.

- 1) Déterminer la fonction dérivée f' de f.
- 2) Soit (C) la courbe de f et $I(1, f(1)) \in (C)$.
 - a) Donner une équation de la tangente T à C en I.
 - b) Etudier les positions relatives de C et T.
 - c) Montrer que pour tout réel x on a $f(2-x) = 4 - f(x)$
- 3) Soit la droite $D_m : y + 9x - m = 0$. (m paramètre réel)
 - a) Pour quelles valeurs de m D_m est-elle tangente à la courbe C ?
 - b) Pour ces valeurs de m trouvées, montrer que les deux droites sont symétriques par rapport à I.

Exercice N 7 Déterminer les coefficients a, b et c d'une fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ de telle façon que la courbe de f soit tangente aux droites : $D_1 : y = 4x + 1$; $D_2 : y = 16x - 23$ et $D_3 : y = -8x + 1$.**Exercice N 8** Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{(2m+1)x + 5m + 7}{x + m + 3}, \text{ avec } m \in \mathbb{R}.$$

Pour quelle valeur de m la courbe de f est-elle tangente à la droite d'équation : $y = -4x - 1$?
Déterminer alors le point de contact.