Exercices 3A SAI.Fethi

Exercice 1:
Pour x réel, on pose :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 1}$$

.

On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
1: Quel est l'ensemble de définition D_f de f ? Etudiez alors les variations de f .
2: Déterminez trois réels a, b et c tels que pour tout réel x dans D_f,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

Montrez alors que la droite (D) d'équation "$y = x - 5$ " est asymptote à (C).
Etudiez la position de (D) par rapport à (C).
3: Etudiez la limite de f en -1. Que peut-on en déduire?
4: Déterminez les points d'intersection entre (C) et l'axe des abscisses.
5: En prenant $-1 + 2\sqrt{2}$ = 1,828 à 0,001 près et $-1 - 2\sqrt{2}$ = -3.828 à 0,001 près, tracez la courbe (C), les asymptotes de (C), ainsi que les tangentes horizontales de (C).

Exercice 2:
Soit f une fonction définie sur l'intervalle]0;+*oo*[par :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$$

où a, b et c sont des nombres réels.
On sait que f est strictement croissante sur]0;2] , strictement décroissante sur [2;+*oo*[,
f(2)=-3 et f(1) = -4.
1: Formez le tableau de signes de $f'(x)$ sur]0;+*oo*[. Quel est le signe de $f(x)$ pour $x > 0$?
2: Exprimez $f'(x)$ en fonction de a , b , c et x .
Montrez alors que les réels a , b et c sont solutions du système:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = -6 \\ 4a - c = 0 \\ a + b + c = -4 \end{cases}$$

Déterminez alors les réels a , b et c . Donnez l'expression de $f(x)$.
3: Montrer que la courbe de f admet deux asymptotes à préciser.
Tracez l'allure de la courbe de f ainsi que ses asymptotes.

Exercice 3:
On pose, pour x réel , $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 2x + 1$. (C) est la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.
1: Justifiez que $f(x)$ est bien défini pour tout réel x.
2: Calculez la fonction dérivée de f , $f'(x)$.
Montrez que pour $x < 0$, on a : $f'(x) < 0$.
Montrez que pour $x \geq 0$, on a : $f'(x) < 0$. Donnez alors le tableau de variation de f sur **R**.
3: Montrez que pour tout $x < 0$, on a : $f(x) + 3x - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} - x}$
Déterminez alors : $\lim_{x \to -\infty} (f(x) + 3x - 1)$. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?
4: Montrez que pour tout $x > 0$, on a: $f(x) + x - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$

Déterminez alors : $\lim_{x \to +\infty} (f(x) + x - 1)$. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?

5: Tracez l'allure de la courbe de f ainsi que les droites d'équation "$y= -3x+1$" et "$y= -x+1$". (on admet que la courbe de f est située au-dessus de ces deux droites)

Exercice 4

Pour $x \in]-1;+\infty[$, on pose :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1}$$

On appelle C_f la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Vérifiez que la fonction dérivée de f est définie par :

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x + 1)^2}$$

2. Etudier alors les variations de f sur $]-1;+\infty[$.

   a. Déterminez la limite de $f(x)$ si x tend vers -1.

   b. Montrez qu'existe 3 réels a , b et c tels que pour tout $x > -1$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$$

   c. Montrez alors que la droite Δ d'équation "$y=x+1$" est asymptote à C_f.

   d. Etudiez la position de Δ par rapport à C_f.

3.

   a. Montrer qu'il existe un point A de C_f tel que la tangente T_A au point A à C_f soit parallèle à la droite d'équation $y=[\ 3/2]x$.

   b.Vérifier que l'équation de la tangente à C_f en A est "$y= 1,5x–0,5$"

4 .Tracez la courbe C_f , T_A , et les asymptotes de C_f.

Exercice 5:

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative (C) dans un plan rapporté à un repère orthonormé$(O, \vec{i}, \vec{j})$.