

Exercice : 1

Soit la fonction f_m définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$f_m(x) = \frac{mx^2 + 2x + 5}{x+1}, m \in \mathbb{R}.$$

On désigne par C_m sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1- a) Déterminer la valeur de m pour que la droite D d'équation $y = 2$ soit une asymptote à C_m .
b) Déterminer alors une équation de l'autre asymptote.
- 2- Soit I le point d'intersection des asymptotes, montrer que I est un centre de symétrie de C_m .
- 3- On prend $m = 1$.
a) Trouver trois réels a, b, c tel que $f_1(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.
b) Interpréter géométriquement le résultat.
c) Etudier les variations de f_1 et la représenter graphiquement
- 4- Soit $g(x) = \frac{1}{2} f_1(x)$. Dresser le tableau de variation de g et représenter sa courbe Γ dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 5- Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. La droite Δ d'équation $x = \alpha$ coupe Γ en M et l'axe des abscisses en N .
a) Déterminer les coordonnées de M et N et $I = M*N$
b) Déterminer l'ensemble des points I quand α décrit $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x+1}$ et C sa courbe

représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1- Etudier les variations de f
- 2- Préciser la nature des branches infinies.

3- Représenter C.

4- a) Déterminer l'équation de C dans le repère $\left(I; \vec{i}; \vec{j}\right)$ où I est

le point de coordonnées (-1,1).

b) Dédire que I est un centre de symétrie pour C.

5- Soit la droite $\Delta : y = mx$ où m est un paramètre réel et $m \geq 1$.

La droite Δ coupe respectivement C et I_1 et I_2 et les asymptotes en J_1 et J_2 . Montrer que $I_1J_1 = I_2J_2$.

Exercice 3 :

Soit la fonction : $f_m(x) = \frac{x^2 + mx - 2}{mx - 1}$; $m \in \mathbb{R}$

et C_m sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

1- Montrer que toutes les courbes C_m passent par des points fixes que l'on précisera les coordonnées.

2- Déterminer m pour que la tangente à C_m , au point d'abscisse nulle ait pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$

3- Etudier les variations de la fonction $f_{1/2}$ et tracer la courbe $C_{1/2}$.

4- Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{2x^2 - 17x + 32}{x - 2}$ et Γ sa

courbe représentative dans le repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$

a) Calculer $[f_{1/2}(x) - g(x)]$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{2\}$.

b) Expliquer alors comment peut-on construire Γ à partir de $C_{1/2}$

5- Déterminer m pour que f_m soit une fonction affine par intervalle.

6- Dans toute la suite on suppose que $m > 0$ et $m \neq 0$.

a) Etudier suivant les valeurs de m le sens de variation de f_m

b) Soit $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{m}\right\}$, justifier l'existence de l'expression

$f_m(x) + f_m\left(\frac{2}{m} - x\right)$ et la calculer.

c) En déduire que C_m admet un centre de symétrie I_m .

d) Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m décrit $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

Exercice 4 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\cos 2x}{(1 + \sin x)^2}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1- Déterminer le domaine de définition D_f de f .
- 2- a) Montrer que la droite Δ d'équation : $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de C .
b) En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $D_E = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$
- 3- a) Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{-2 \cos x (1 + 2 \sin x)}{(1 + \sin x)^3}$
b) Dresser le tableau de variation de la restriction f à D_E
- 4- a) Calculer $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.
b) Tracer la partie de C relative à l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$
- 5- Soit g la fonction définie par $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$.

On désigne par C' la courbe représentative de g dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Montrer que C' est l'image de C par une translation dont on précisera le vecteur.

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ et on

note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1- a) Donner la période de f .

b) Montrer que la droite d'équation $x = \frac{7\pi}{6}$ est un axe de

symétrie de C .

c) Déterminer le point d'inflexion I de (ζ) dont l'abscisse est

un élément de $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$.

d) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à C en I .

e) Montrer que I est un centre de symétrie de C .

2- Dresser le tableau de variation de la restriction de f à $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$

puis construire C .

3- Soit la fonction g définie sur $[0, \pi]$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{2 \cos(2x - \frac{\pi}{3}) + 1}{2(2 \cos(x - \frac{\pi}{6}) - 1)} & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

a) Montrer qu'il existe une constante réelle a que l'on déterminera telle que pour x de $[0, \pi]$ $g(x) = f(x) + a$

b) Construire la courbe représentative de g dans le même repère

4- Déterminer la dérivée de la fonction k définie par $k(x) = [f(x)]^5$.

Exercice 6:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{4\cos^2 2x}{2\cos 2x - 1}$ et C sa courbe

représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1- Préciser le domaine de définition D_f de f et montrer que la

droite D d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie de C .

2- a) Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{8 \sin 4x(1 - \cos 2x)}{(2 \cos 2x - 1)^2}$

b) Dresser un tableau de variation de f sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cap Df$

3- a) Construire la courbe C_0 de la restriction de f à $[0, \pi] \cap Df$

b) Expliquer comment C se déduit de C_0 ?

4- Soit l'équation $E : 3\cos^2 2x - 2k\cos 2x + k = 0$ (k : réel)

a) Utiliser C_0 pour déterminer les valeurs de k pour lesquelles l'équation E admette 4 solutions distinctes dans $[0, \pi]$.

Exercice 7 :

Une urne contient quatre jetons blancs portant les chiffres 1, 2, 2, 3 et trois jetons rouges portant les chiffres 1, 2, 2 et cinq jetons noirs portant les chiffres 1, 1, 2, 2, 3.

On tire successivement et sans remise 4 jetons de l'urne.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A : Les 4 jetons tirés portent le même chiffre

B : Tirer 2 jetons blancs, 1 jeton rouge et 1 jeton noir

C : parmi les 4 jetons tirés on doit avoir exactement deux jetons rouges et deux jetons portant le chiffre 1

D : Tirer 4 jetons dont la somme des chiffres égale à 6.

Exercice 8 :

Un enfant à six billes : 3 rouges, 2 blanches et 1 verte, il met les 6 billes une par une dans 3 trous : t_1 , t_2 , t_3 (un trou peut contenir de 0 à 6 billes).

1- On désigne par A l'événement « le trou t_1 reste vide »
Montrer que $P(A) = 64/729$

2- Calculer la probabilité des événements suivants

B : « t_1 contient exactement 4 billes. »

C : « les 3 billes rouges se trouvent dans le trou t_1 »

D : « Les 3 billes rouges se trouvent dans 3 trous différents. »

Exercice 9 :

Une urne U contient dix boules :

Six blanches numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6

Quatre noires numérotées 7, 8, 9, 10

- 1- On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants :
 A : « les 3 boules sont de deux couleurs »
 B : « les 3 boules contiennent au moins une blanche »
 C : « il y a exactement une blanche et deux numéros pairs »
- 2- On tire successivement et avec remise deux boules de U. Calculer la probabilité des événements suivants :
 E : « obtenir deux boules de couleurs différentes »
 F : « la valeur absolue de la différence des 2 numéros est 4 »
 G : $E \cup F$
 H : « la somme des 2 numéros est strictement supérieure à 5. »

Exercice 10 :

Une boîte contient 8 jetons; un de forme triangulaire et de couleur rouge, deux de formes triangulaires et de couleurs vertes et cinq de formes rectangulaires et de couleurs rouges.

On tire simultanément 2 jetons de la boîte et on suppose que les tirages sont équiprobables.

- 1- Calculer la probabilité des événements suivants :
 A : « Les 2 jetons obtenus sont de même couleur. »
 B : « Les 2 jetons obtenus sont de même forme »
- 2- Définir les événements $A \cap B$ et $A \cup B$ puis calculer leurs probabilités.

Exercice 11:

Une urne contient 3 boules bleues, deux boules vertes et 5 boules rouges. On suppose tous les tirages sont équiprobables.

- 1- On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 A₁ : « Les 3 boules tirées sont de même couleur »
 A₂ : « Les 3 boules tirées sont de couleurs différentes »
 A₃ : « Deux boules au moins sont de même couleur. »
- 2- On tire 3 boules de l'urne, l'une après l'autre, en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants :
 A : « la première boule tirée est verte, la deuxième est rouge et la troisième est bleue. »
 B : « obtenir une boule verte pour la première fois au 2^{ème} »

tirage. »

C : « obtenir deux boules bleues et deux seulement. »

Exercice 12 :

Une urne contient 3 boules noires et 4 boules rouges. On tire simultanément deux boules de l'urne.

On suppose que les tirages sont équiprobables.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « avoir une boule noire et une boule rouge »

B : « avoir deux boules noires. »

C : « avoir deux boules de même couleur. »

Exercice 13 :

Un sac contient quatre boules rouges numérotées 1, 1, 1, 2 trois boules noires numérotées 1, 2, 2 et trois boules blanches numérotées 1, 1, 2. Un joueur tire successivement et sans remise 3 boules du sac.

1- Combien y a-t-il de tirage possible ?

2- Combien y a-t-il de tirages :

a) Contenant deux boules portant le n°1 et une boule portant le n°2.

b) Contenant trois boules tricolores.

c) Contenant deux boules portant le n°1 et une boule blanche.

Exercice 14:

A] Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$ de courbe (C) dans

un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer les réels a , b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$.

2) Déduire les équations des asymptotes à (C).

3) Etudier les variations de f et tracer (C).

4)a) Utiliser (C) pour déterminer le nombre de solutions de l'équation :

(E) : $x^2 + (1 - m)x - 1 - 2m = 0$ où m est paramètre réel .

b) Dans le cas où la droite $\Delta_m : y = m$ coupe (C) en deux points M' et M, d'abscisses x' et x'' tel que :

$x' < x''$ et coupe les deux asymptotes verticales et obliques respectivement en P et Q ; Montrer que

$\overline{PM'} \cdot \overline{QM'}$ est une constante que l'on déterminera .

B]

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow |x| - 1 - \frac{1}{|x| + 2}$$

- 1) Etudier la parité de g.
- 2) Etudier la dérivabilité de g à droite en 0.
- 3) Sans étudier les variations de g ; construire sa courbe (C') dans le même repère que (C) en le justifiant.

Exercice 15

Soit $m \in \mathbb{R}^*$, on définit $f_m(x) = \frac{x^2 + mx - m^2}{x - m}$.

I/ Pour $m = 1$:

- 1) Ecrire $f_1(x) = \frac{ax + b}{x - 1}$, où a, b et c sont des réels que

l'on précisera.

- 2) Etudier les variations de f_1 (on cherchera les limites, les asymptotes, les extrémums)
- 3) Vérifier que le point Ω_1 l'intersection des asymptotes est un centre de symétrie pour (C1).

4) Tracer (C_1) dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$ et $\|\vec{j}\| = 1\text{cm}$.

5) En déduire les courbes des fonctions g et h telle que :

$$g(x) = \frac{x^2 + x - 1}{|x - 1|} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{x^2}{x - 1}.$$

II/ Pour $m \in \mathbb{R}^*$.

- 1) Vérifier que $f_m(x) = x + 2m + \frac{m^2}{x - m}$, en déduire que les asymptotes obliques des courbes C_m de f_m ont une direction fixe.
- 2) Trouver les coordonnées du point Ω_m : intersection des asymptotes de (C_m) , en déduire que Ω_m varie sur une droite fixe Δ à déterminer.
- 3) Etudier suivant les valeurs de m , les variations de f_m (on distinguera les cas $m > 0$ et $m < 0$)
- 4) Soit I_m le point où C_m coupe l'axe (o, j) , que peut-on dire de la tangente en I_m quand m varie.
- 5) Soit J_m le point d'abscisse non nulle où f_m admet un extremum, montrer que J_m varie sur une droite fixe que l'on précisera.