Exercices 3A Maths Sai Fethi

Exercice : 1

Soit la fonction f_m définie sur IR $\setminus\{-1\}$ par :

$$f_m(x) = \frac{m\,x^2+2x+5}{x+1},\ m \in \text{IR}.$$

On désigne par C_m sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1- a) Déterminer la valeur de m pour que la droite D d'équation $y = 2$ soit une asymptote à C_m.
   b) Déterminer alors une équation de l'autre asymptote.
2- Soit I le point d'intersection des asymptotes, montrer que I est un centre de symétrie de C_m.
3- On prend m = 1.
   a) Trouver trois réels a, b, c tel que $f_1(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.
   b) Interpréter géométriquement le résultat.
   c) Etudier les variations de f_1 et la représenter graphiquement
4- Soit $g(x) = \dfrac{1}{2} f_1(x)$. Dresser le tableau de variation de g et représenter sa courbe Γ dans le même repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$
5- Soit $\alpha \in IR \setminus\{-1\}$. La droite Δ d'équation $x = \alpha$ coupe Γ en M et l'axe des abscisses en N.
   a) Déterminer les coordonnées de M et N et I = M*N
   b) Déterminer l'ensemble des points I quand α décrit $IR\ \{-1\}$

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+3x+3}{x+1}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1- Etudier les variations de f
2- Préciser la nature des branches infinies.

3- Représenter $\mathcal{C}$.

4- a) Déterminer l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(I; \vec{i}; \vec{j}\right)$ où I est le point de coordonnées (-1,1).
b) Déduire que I est un centre de symétrie pour $\mathcal{C}$.

5- Soit la droite $\Delta : y = mx$ où m est un paramètre réel et $m \geq 1$.
La droite Δ coupe respectivement C et I_1 et I_2 et les asymptotes en J_1 et J_2. Montrer que $I_1J_1 = I_2J_2$.

Exercice 3 :

Soit la fonction : $f_m(x) = \dfrac{x^2 + mx - 2}{mx - 1}$; $m \in$ IR

et C_m sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

1- Montrer que toutes les courbes C_m passent par des points fixes que l'on précisera les coordonnées.
2- Déterminer m pour que la tangente à $C_{m,}$ au point d'abscisse nulle ait pour coefficient directeur ½
3- Etudier les variations de la fonction $f_{½}$ et tracer la courbe $C_{1/2}$.
4- Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{2x^2 - 17x + 32}{x - 2}$ et Γ sa courbe représentative dans le repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$
a) Calculer $[f_{½}(x) - g(x)]$ pour tout $x \in IR - \{2\}$.
b) Expliquer alors comment peut-on construire Γ à partir de $C_{1/2}$
5- Déterminer m pour que f_m soit une fonction affine par intervalle.
6- Dans toute la suite on suppose que $m > 0$ et $m \neq 0$.
a) Etudier suivant les valeurs de m le sens de variation de f_m
b) Soit $x \in IR - \left\{\dfrac{1}{m}\right\}$, justifier l'existence de l'expression $f_m(x) + f_m\left(\dfrac{2}{m} - x\right)$ et la calculer.
c) En déduire que C_m admet un centre de symétrie I_m .
d) Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m décrit $IR_+^* \{1\}$

Exercice 4 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{(1+\sin x)^2}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$

1- Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2- a) Montrer que la droite Δ d'équation : $x = \dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de C.

b) En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $D_E = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

3- a) Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{-2\cos x(1+2\sin x)}{(1+\sin x)^3}$

b) Dresser le tableau de variation de la restriction f à D_E

4- a) Calculer $f(0)$, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

b) Tracer la partie de C relative à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$

5- Soit g la fonction définie par $g(x) = f\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + 1$.

On désigne par C ' la courbe représentative de g dans le repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

Montrer que C' est l'image de C par une translation dont on précisera le vecteur.

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ et on note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

1- a) Donner la période de f.

b) Montrer que la droite d'équation $x = \frac{7\pi}{6}$ est un axe de symétrie de C.

c) Déterminer le point d'inflexion I de (ξ) dont l'abscisse est un élément de $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$.

d) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à C en I.

e) Monter que I est un centre de symétrie de C.

2- Dresser le tableau de variation de la restriction de f à $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ puis construire C.

3- Soit la fonction g définie sur $[0, \pi]$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{2\cos(2x - \frac{\pi}{3}) + 1}{2(2\cos(x - \frac{\pi}{6}) - 1)} & \text{si } x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 & \end{cases}$$

a) Montrer qu'il existe une constante réelle a que l'on déterminera telle que pour x de $[0, \pi]$ g (x) = f(x) + a

b) Construire la courbe représentative de g dans le même repère

4- Déterminer la dérivée de la fonction k définie par $k(x) = [f(x)]^5$.

Exercice 6:

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{4\cos^2 2x}{2\cos 2x - 1}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

1- Préciser le domaine de définition D_f de f et montrer que la droite D d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie de C.

2- a) Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{8\sin 4x(1-\cos 2x)}{(2\cos 2x - 1)^2}$

b) Dresser un tableau de variation de f sur I = $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \cap Df$

3- a) Construire la courbe C_0 de la restriction de f à $[0, \pi] \cap Df$

b) Expliquer comment C se déduit de C_0 ?

4- Soit l'équation E : $3\cos^2 2x - 2k\cos 2x + k = 0$ (k : réel)

a) Utiliser C_0 pour déterminer les valeurs de k pour lesquelles l'équation E admette 4 solutions distinctes dans $[0, \pi]$.

Exercice 7 :

Dans l'espace ξ muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$, on considère les plans P : x- 2y + 3z -2 = 0 et Q : 2x +y –z + 5 = 0

1- a) Montrer que P et Q sont sécants et vérifier qu'ils ne sont pas perpendiculaires

b) Donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection D.

2- Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -1 - \alpha \\ y = \alpha; \ \alpha \in IR \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$$

a) Montrer que Δ est incluse dans P.

b) Etudier la position de D et Δ.

3- Déterminer une équation cartésienne du plan H perpendiculaire à P et contenant Δ .

4- Calculer la distance du point A (1, 2,3) à la droiteΔ.

Exercice 8 :

Dans l'espace ξ muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$ on donne les points A (0,-2,3) et I (1, 0,2).

1- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IA).

2- Déterminer l'équation cartésienne du plan P passant par A et perpendiculaire à (IA) .

Exercice 9 :

L'espace ξ est rapporté d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

Soit Δ la droite définie par

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y-3z+14=0 \end{cases}$$

1- Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de Δ et un point A de Δ.

2- Soit m un réel et P_m l'ensemble des points M(x ;y ;z) tels que (2-m)x+(1+m)y+(2m-1)z+2+m=0.

a) Montrer que pour tout réel m, P_m est un plan.

b) Etudier la position relative de Δ et P_0 .

3- a) Démontrer que tous les plans P_m contiennent une droite fixe D dont le système d'équations cartésiennes est :

$$\begin{cases} -x+y+2z+1=0 \\ 2x+y-z+2=0 \end{cases}$$

Exercice 10 :

Soit R $\left(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace ξ .

On donne les points A (1,-2,3), B (2,3 ,5) et C (1, 0,1)

1- Montrer que A , B ,C ne sont pas alignés.

2- Soit D et Δ les droites définies par :

$$D \begin{cases} x = 1-\alpha \\ y = -1+\alpha ;\ \alpha \in IR \\ z = 2+3\alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad \Delta : \begin{cases} x = \beta \\ y = -4\beta ;\ \beta \in IR \\ z = 2\beta \end{cases}$$

a) Le point C appartient t-il à D ?

b) Etudier la position de D et Δ.

c) Déterminer un système d'équation cartésienne de la droite Δ' parallèle à D et passant par C.

d) Δ et Δ' sont elles coplanaires ?

Exercice 11 :

Une urne contient quatre jetons blancs portant les chiffres 1 , 2 , 2 ,3 et trois jetons rouges portant les chiffres 1 , 2 , 2 et cinq jetons noirs portant les chiffres 1 , 1 ,2 ,2 , 3.

On tire successivement et sans remise 4 jetons de l'urne.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A : Les 4 jetons tirés portent le même chiffre

B : Tirer 2 jetons blancs, 1 jeton rouge et 1 jeton noir

C : parmi les 4 jetons tirés on doit avoir exactement deux jetons rouges et deux jetons portant le chiffre 1

D : Tirer 4 jetons dont la somme des chiffres égale à 6.

Exercice 12 :

Un enfant à six billes : 3 rouges, 2 blanches et 1 verte, il met les 6 billes une par une dans 3 trous : t_1 , t_2 , t_3 (un trou peut contenir de 0 à 6 billes) .

1- On désigne par A l'événement « le trou t_1 reste vide »
Montrer que P (A) = 64/729

2- Calculer la probabilité des événements suivants
B : « t_1 contient exactement 4 billes. »
C : « les 3 billes rouges se trouvent dans le trou t_1 »
D : « Les 3 billes rouges se trouvent dans 3 trous différents. »

Exercice13 :

Une urne U contient dix boules :
Six blanches numérotées 1 , 2 , 3, 4 ,5 , 6
Quatre noires numérotées 7 , 8 , 9 , 10

1- On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne. Calculer le probabilité des événements suivants :
   A : « les 3 boules sont de deux couleurs »
   B : « les 3 boules contiennent au moins une blanche »
   C : « il y a exactement une blanche et deux numéro pairs »
2- On tire successivement et avec remise deux boules de U. Calculer la probabilité des événements suivants :
   E : « obtenir deux boules de couleurs différentes »
   F : « la valeur absolue de la différence des 2 numéro est 4 »
   G : $E \cup F$
   H : « la somme des 2 numéros est strictement supérieure à 5. »

Exercice 14 :

Une boite contient 8 jetons; un de forme triangulaire et de couleur rouge, deux de formes triangulaires et de couleurs vertes et cinq de formes rectangulaires et de couleurs rouges.
On tire simultanément 2 jetons de la boite et on suppose que les tirages sont équiprobable.

1- Calculer la probabilité des événements suivants :
   A : « Les 2 jetons obtenus sont de même couleur. »
   B : « Les 2 jetons obtenus sont de même forme »
2- Définir les événements $A \cap B$ et $A \cup B$ puis calculer leurs probabilités.

Exercice 15 :

Une urne contient 3 boules bleues, deux boules vertes et 5 boules rouges. On suppose tous les tirages sont équiprobables.

1- On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A_1 : « Les 3 boules tirées sont de même couleur »
   A_2 : « Les 3 boules tirées sont de couleurs différentes »
   A_3 : « Deux boules au moins sont de même couleur. »
2- On tire 3 boules de l'urne, l'une après l'autre, en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « la première boule tirée est verte, la deuxième est rouge et la troisième est bleue. »
B : « obtenir une boule verte pour la première fois au 2éme tirage. »
C : « obtenir deux boules bleues et deux seulement. »

Exercice 16 :

Une urne contient 3 boules noires et 4 boules rouges. On tire simultanément deux boules de l'urne.
On suppose que les tirages sont équiprobables.
Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « avoir une boule noire et une boule rouge »
B : « avoir deux boules noires. »
C : « avoir deux boules de même couleur. »

Exercice 17 :

Un sac contient quatre boules rouges numérotées 1, 1, 1, 2 trois boules noires numérotées 1, 2, 2 et trois boules blanches numérotées 1, 1, 2. Un joueur tire successivement et sans remise 3 boules du sac.

1- Combien y a-t-il de tirage possible ?
2- Combien y a-t-il de tirages :
a) Contenant deux boules portant le n°1 et une boule portant le n°2.
b) Contenant trois boules tricolores.
c) Contenant deux boules portant le n°1 et une boule blanche.

Exercice 18:

A] Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x+2}$ de courbe (C) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$.

2) Déduire les équations des asymptotes à (C).

3) Etudier les variations de f et tracer (C).

4)a) Utiliser (C) pour déterminer le nombre de solutions de l'équation :

(E) : $x^2 + (1 - m)x - 1 - 2m = 0$ où m est paramètre réel .

b) Dans le cas où la droite $\Delta_m : y = m$ coupe (C) en deux points M' et M, d'abscisses x' et x'' tel que :

$x' < x''$ et coupe les deux asymptotes verticales et obliques respectivement en P et Q ; Montrer que

$\overline{PM'}.\overline{QM'}$ est une constante que l'on déterminera .

B]

On considère la fonction $g : IR \longrightarrow IR$

$$x \longrightarrow |x| - 1 - \frac{1}{|x| + 2}$$

1) Etudier la parité de g.

2) Etudier la dérivabilité de g à droite en 0.

3) Sans étudier les variations de g ; construire sa courbe (C') dans le même repère que (C) en le justifiant.

Exercice 19

Soit $m \in \mathbb{R}^*$, on définit $f_m(x) = \dfrac{x^2 + mx - m^2}{x - m}$.

I/ Pour m = 1 :

1) Ecrire $f_1(x) = = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$, où a, b et c sont des réels que l'on précisera.

2) Etudier les variations de f_1 (on cherchera les limites, les asymptotes, les extrémas)

3) Vérifier que le point Ω_1 l'intersection des asymptotes est un centre de symétrie pour (C1).

4) Tracer (C_1) dans un repère orthogonal $(o,\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\|$=2cm et $\|\vec{j}\|$=1cm.

5) En déduire les courbes des fonctions g et h telle que :

$$g(x) = \frac{x^2+x-1}{|x-1|} \quad \text{et } h(x) = \frac{x^2}{x-1}.$$

II/ <u>Pour m $\in$ IR*.</u>

<u>1)</u> Vérifier que $f_m(x) = x + 2m + \frac{m^2}{x-m}$, en déduire que les asymptotes obliques des courbes C_m de f_m ont une direction fixe.

<u>2)</u> Trouver les coordonnés du point Ω_m : intersection des asymptotes de (Cm), en déduire que Ωm varie sur une droite fixe Δ à déterminer.

<u>3)</u> Etudier suivant les valeurs de m, les variations de f_m (on distinguera les cas m>0 et m<0)

<u>4)</u> Soit I_m le point où Cm coupe l'axe (o,j) , que peut-on dire de la tangente en I_m quand m varie.

<u>5)</u> Soit J_m le point d'abscisse non nulle où f_m admet un extremum, montrer que J_m varie sur une droite fixe que l'on précisera.