

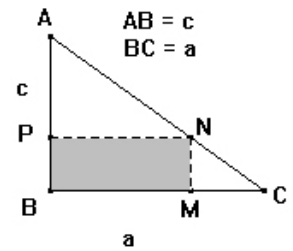
Problèmes d'optimisation

Exercice 1 :

Soit un triangle ABC rectangle en B avec $AB = c$ et $BC = a$.

M est un point quelconque du segment $]BC[$, $N = p_{(AB)}(M) \in (AC)$ et $P = p_{(BC)}(N) \in (AB)$. Le quadrilatère MNPB ainsi construit est un rectangle.

Etudier les variations du périmètre et de l'aire du rectangle BMNP.

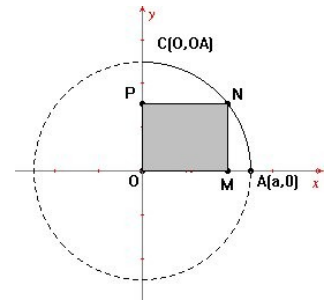


Exercice 2:

Soit un R.O.N. $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$, le cercle $\mathcal{C}(O, OA)$, $A(a, 0)$ et $a > 0$.

M est un point du segment $]O, A[$.

Etudier les variations de l'aire du rectangle OMNP, où N est le point du cercle $\mathcal{C}$ tel que $(MN) \parallel (OJ)$ et $P = p_{(OA)}(N) \in (OJ)$.

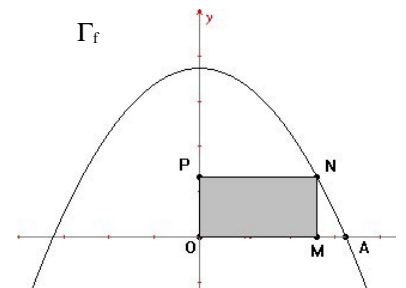


Exercice 3:

Soit un R.O.N. $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$, le graphique Γ_f de la fonction f définie par $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, et $a < 0$, $c > 0$ et $b = 0$.

M est un point du segment $]O, A[$ et $A \in \Gamma_f \cap [O, I)$.

Etudier les variations de l'aire du rectangle OMNP, où N est le point du graphique Γ_f tel que $(MN) \parallel (OJ)$ et $P = p_{(OA)}(N) \in (OJ)$.



Exercice 4:

Soit un R.O.N. $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$, et la fonction f définie par $y = f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2}$.

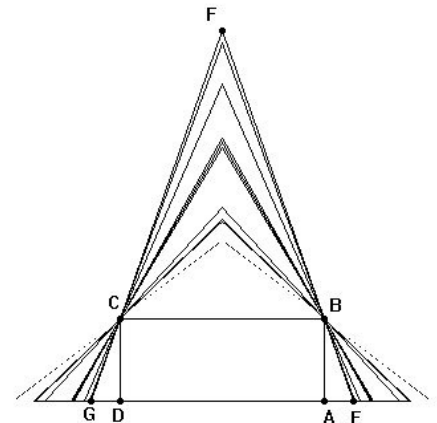
M est un point du segment $]O, A[$ et $A \in \Gamma_f \cap [O, I)$.

Etudier les variations de l'aire du rectangle OMNP, où N est le point du graphique Γ_f tel que $(MN) \parallel (OJ)$ et $P = p_{(OA)}(N) \in (OJ)$.

Exercice 5 :

Soit un rectangle ABCD de côté $AB=a$ et $BC=b$ et le triangle isocèle exinscrit EFG.

Etudier les variations de l'aire de ce triangle.



Problèmes d'optimisation - corrigés

Exercice 1 :

Soit un triangle ABC rectangle en B avec $AB = c$ et $BC = a$.

M est un point quelconque du segment BC , $N = p_{(AB)}(M) \in (AC)$ et $P = p_{(BC)}(N) \in (AB)$. Le quadrilatère MNPB ainsi construit est un rectangle.

Etudier les variations du périmètre et de l'aire du rectangle BMNP.

Posons la variable $x = BM$ et le paramètre $y = BP$

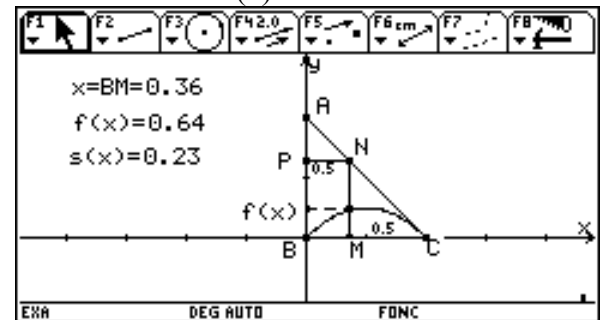
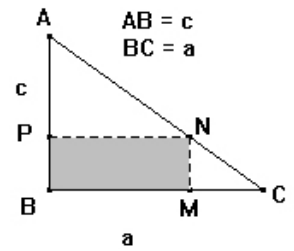
Aire : $s(x) = BM \cdot BP = x \cdot y$; or $y = f(x)$ si $(AC) = \Gamma_f$
équation de (AC) :

$$y - y_0 = m(x - x_0) \text{ et } x_0 = 0, y_0 = c \text{ et } m = \frac{0 - c}{a - 0}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-c}{a}x + c = f(x)$$

$$\text{d'où } s(x) = x \cdot \left(\frac{-c}{a}x + c \right) = \frac{-c}{a}x^2 + cx$$

$$\text{et } s'(x) = \frac{-2c}{a}x + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} : M \text{ milieu de } [B, C] \quad s'(x) = -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (maximum)}$$



Exercice 2:

Soit un R.O.N. $\mathcal{R} = (O, ,)$, le cercle $\mathcal{C}(O, OA)$, $A(a, 0)$ et $a > 0$.

M est un point du segment $]O, A[$.

Etudier les variations de l'aire du rectangle OMNP, où N est le point du cercle $\mathcal{C}$ tel que $(MN) \parallel (OJ)$ et $P = p_{(OA)}(N) \in (OJ)$.

Posons la variable $x = OM$ et le paramètre $y = OP$

Aire : $s(x) = OM \cdot OP = x \cdot y$; or $y = f(x)$ si car $N \in \Gamma_f$

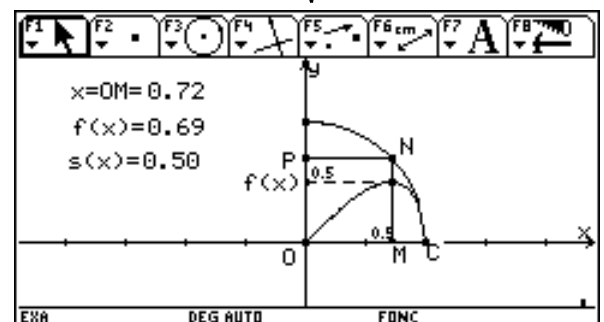
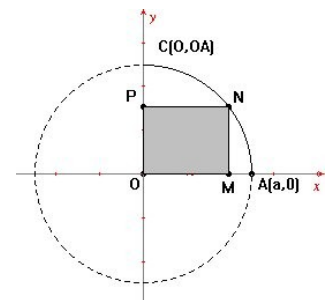
$$\text{d'où } s(x) = x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\text{et } s'(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\text{et } s'(x) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

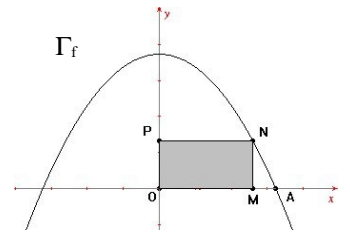
$$\text{si } a = 1, y = f(x) = \sqrt{1 - x^2} \text{ et}$$

$$s(x) = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$



$$s'(x) = 1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707 \text{ (maximum)}$$

Exercice 3: Soit un R.O.N. $\mathcal{R} = (O, ,)$, le graphique Γ_f de la fonction f définie par $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, et $a < 0$, $c > 0$ et $b = 0$.
 M est un point du segment $]O,A[$ et $A \in \Gamma_f \cap [O,I)$.
 Etudier les variations de l'aire du rectangle $OMNP$, où N est le point du graphique Γ_f tel que $(MN) \parallel (OJ)$ et $P = p_{(OA)}(N) \in (OJ)$.



si $a = -1$ et $c = 1$, $y = f(x) = -x^2 + 1$ et
 $s(x) = -x^3 + x$

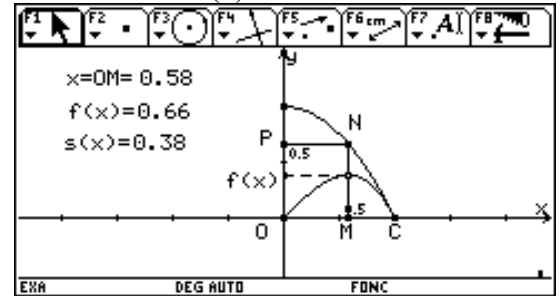
Posons la variable $x = OM$ et le paramètre $y = OP$

Aire : $s(x) = OM \cdot OP = x \cdot y$; or $y = f(x)$ si car $N \in \Gamma_f$

d'où $s(x) = x \cdot (ax^2 + c) = ax^3 + cx$

et $s'(x) = 3ax^2 + c$

et $s'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-c}{3a}}$



$s'(x) = -3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577$ (maximum)

Exercice 4: Soit un R.O.N. $\mathcal{R} = (O, ,)$ et la fonction f définie par $y = f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2}$.

M est un point du segment $]O,A[$ et $A \in \Gamma_f \cap [O,I)$.

Etudier les variations de l'aire du rectangle $OMNP$, où N est le point du graphique Γ_f tel que $(MN) \parallel (OJ)$ et $P = p_{(OA)}(N) \in (OJ)$.

Posons la variable $x = OM$ et le paramètre $y = OP$

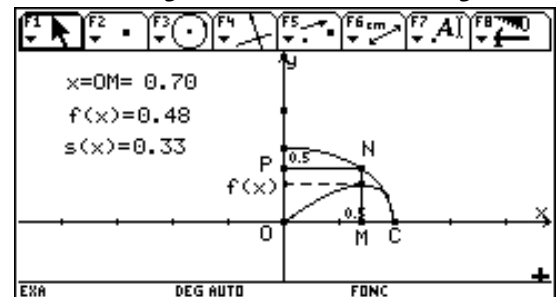
Aire : $s(x) = OM \cdot OP = x \cdot y$; or $y = f(x)$ si car $N \in \Gamma_f$

d'où $s(x) = x \cdot \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2}$

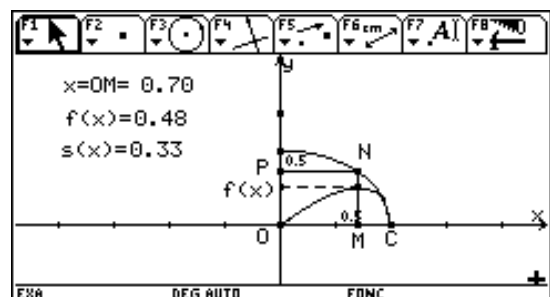
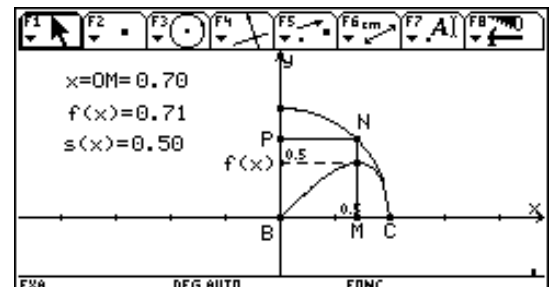
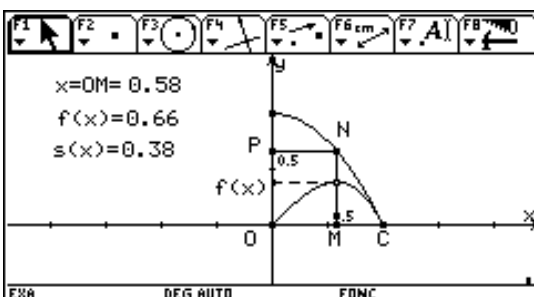
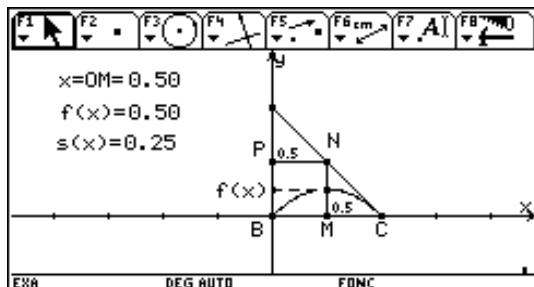
et $s'(x) = \frac{2}{3} \left[\sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \right] = \frac{2}{3} \left[\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right]$

et $s'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

si $y = f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2}$ et $s(x) = x \cdot \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2}$



$s'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$ (maximum)



Exercice 5 : Corrigé

Déterminer la fonction a qui donne l'aire $a(x)$ d'un triangle isocèle $\triangle MNP$ circonscrit à un rectangle fixe $ABCD$ dont les dimensions sont $AB = a = 2$ et $BC = b = 1$, avec $x = HP$, hauteur du triangle $\triangle MNP$, comme variable.

♥ constantes : $a = 2$ et $b = 1$

♥ fonction : aire = base $\cdot$ hauteur = $\frac{1}{2} MN \cdot HP = MH \cdot HP = y \cdot x$

♥ variable : $HP = x$, avec $1 < x$

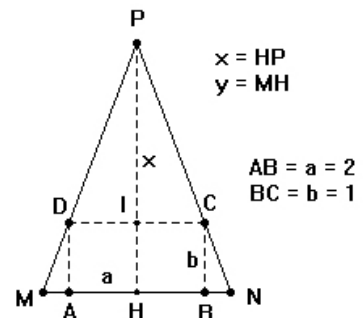
♥ paramètre : $MH = y$

♥ calcul de $a(x)$: $a(x) = y \cdot x$; exprimons y en fonction des constantes et de la variable x :

avec le théorème de Thalès dans $\triangle MHP$ et $\triangle DIP$,

$$\text{on a } \frac{MH}{DI} = \frac{PH}{PI} = \left(\frac{MP}{DP} \right) \Rightarrow \frac{y}{1} = \frac{x}{x-1}$$

$$\text{ainsi, } a(x) = y \cdot x = \frac{x}{x-1} \cdot x = \frac{x^2}{x-1}$$



Construction avec Cabri-géomètre :

Représentation graphique de la fonction a :
lorsque le point P se rapproche du point I ,
 x tend vers 1 par la droite et le point $K(x, a(x))$
dessine une courbe qui se rapproche de la droite
verticale $x = 1$, sans jamais la couper.

On a

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} a(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \left(\frac{1}{0^+} \right) = +\infty.$$

Cette limite " infinie " traduit la présence
d'une droite verticale (d'équation $x = 1$)
qui " accompagne " la courbe de la fonction a
lorsque x tend vers 1 .

De plus $a'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ et $a'(x) = 0$ et $x > 1 \Leftrightarrow x = 2$ et $a'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$;

L'aire du triangle MNP est donc maximale en $x = 2$ et elle vaut $a(2) = 4$

