Produit scalaire dans le plan 12 septembre 2008

Exercice 1 :

ABC est un triangle isocèle en A tel que : AB=7 et BC=10.
Soit E le symétrique de A par rapport à (BC).

1) Montrer que : AE=$4\sqrt{6}$.
2) Calculer $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{AE}$.

Exercice 2 :

Soit un triangle ABC tels que AC=4, BC=8 et $\widehat{ACB}=\frac{\pi}{3}$.

I le milieu de $[BC]$, H le projeté orthogonale de A sur (BC).

1)a) Calculer $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$, en déduire CH=2.

b) Calculer AH, AB et cos $\widehat{ABC}$.

2) Soit G le barycentre des points pondérés (C .1) et (B,-4).

a) Montrer que pour tout M du plan on a :

$MC^2-4MB^2=-3MG^2+GC^2-4GB^2$.

b) Calculer GC^2 et GB^2.

c) Déterminer chacun des ensembles suivants :

E=$\left\{M\in P/MC^2+MB^2=64\right\}$

F=$\left\{M\in P/MC^2-4MB^2=-\frac{42}{9}\right\}$.

Exercice 3

Soient A et B deux points du plan tels que : AB=5 (L'unité de mesure de longueur est le centimètre). I = A*B.

1) Déterminer et construire l'ensemble

$$(C)=\left\{M\in P/MA^2+MB^2=\frac{89}{2}\right\}.$$

2) Construire le point H de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=10$.

3) Déterminer et construire l'ensemble $\Delta=\left\{M\in P/\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=10\right\}$.

4) Construire un point C du plan vérifiant $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=10$ et AC = 4.

5) Soient les point D et E tels que $\overrightarrow{AD}=\frac{-7}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

a) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}$ **et** $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}$.

b) En déduire que $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

c)Que représente alors la droite (CD) pour le triangle (BDE) ?

SAI.Fethi

Exercice 4:

Dans un plan P, on considère un triangle ABC tel que :

AB = 2 et AC = 3 et $\widehat{\mathrm{BAC}}=\frac{\pi}{3}$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$ et BC.
2. Soit D le point du plan P tel que : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}$.

   Montrer que : AD=$\sqrt{13}$.

3) Soit I le point du plan P tel que : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

   a) Montrer que : $\overrightarrow{IA}\bullet\overrightarrow{AD}=-1$.
   b) Calculer $\overrightarrow{IA}\bullet\overrightarrow{ID}$.
   c) Montrer que, pour tout point M de P, on a :
   $3MI^2-MC^2=2MA^2-6$
   d) Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan P tels que : $3MI^2-MC^2=20$.

Exercice 5:

ABIE et ACJF sont deux carrés. On donne c=AB, b=AC, $\widehat{BAC}=\alpha$.

1) Exprimer $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{AF}$ en fonction de b, c et α.

2) En déduire la valeur de $\overrightarrow{BF}\bullet\overrightarrow{CE}$ .Conclure.

3) Exprimer BF² et CE² en fonction de b, c et α.

4) En déduire BF et CE .

Exercice 6:

Soit ABC un triangle tel que AB=a, AC= 3a et $\widehat{BAC}=\frac{2\pi}{3}$, avec a un réel strictement positif.

1) Calculer BC.
2) Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB). Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
En déduire AH puis CH.
3) Calculer AI où I est le milieu de [BC].
4) Soit J le milieu de [AI].

a) Montrer que pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=2\left(MJ^2-AJ^2\right)$.

b) Trouver l'ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=\frac{a^2}{4}$.

SAI.Fethi

Exercice 7:

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a, avec a un réel strictement positif.

1) Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant : $MA^2 + MB^2 = a^2$
2) Construire le point D vérifiant : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
3) a)Exprimer $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{BC}$ en fonction de a.

   b) En déduire la valeur de $\overrightarrow{BD} \bullet \overrightarrow{BC}$.

   c) Montrer que CD=2a et AD=a$\sqrt{7}$.

4) Pour tout point M du plan on pose f(M)= $2MA^2 - MB^2 - MC^2$. On désigne par (ζ) l'ensemble des points M du plan tels que f(M)=0.

   a) Vérifier que C appartient à (ζ).

   b) Exprimer f(M) en fonction de MD et a.

   c) Déterminer et construire l'ensemble (ζ).

5) Pour tout point M du plan on pose g(M)=2 $\overrightarrow{MC} \bullet \overrightarrow{DB} + a^2$.

   a) Déterminer (Δ) des points M du plan tels que g(M)=a^2 .

   b) Soit I le second point d'intersection autre que C de (ζ) et (Δ). Quelle est la nature du triangle CDI ?

Exercice 8 :

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a, avec a un réel strictement positif. Soit I le milieu de [BC].

1) Soit G le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, 1) et (C,1). Montrer que G est le milieu de [AI].
2) Exprimer en fonction de a : GA^2, GB^2 et GC^2.
3) Déterminer l'ensemble (ζ) des points M du plan vérifiant : $2MA^2+MB^2+MC^2=a^2$.
4) Soit J le milieu de [AG].

   a) Montrer que : $2MA^2 + \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MC} = 4(MJ^2 - JA^2)$

   b) Déterminer l'ensemble (ζ') des points M du plan vérifiant :

$$2MA^2 + \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MC} = 3a^2$$

SAI.Fethi