

Exercice N° 1 :

Soit un triangle ABC du plan P , A' , B' , C' les images des points A , B et C par les projections orthogonales sur (BC), (AC) et (AB). H est l'orthocentre du triangle ABC.

- 1) Comparer les réels $\overline{HA} \cdot \overline{HB}$; $\overline{HA} \cdot \overline{HC}$ et $\overline{HB} \cdot \overline{HC}$
- 2) Montrer les égalités suivantes :

$$\overline{HA} \times \overline{HA'} = \overline{HB} \times \overline{HB'} = \overline{HC} \times \overline{HC'}$$

Exercice N° 2 :

Soit ABCD un parallélogramme et M un point du plan.

- 1) Montrer l'égalité $\overline{AM} \cdot \overline{AB} + \overline{AM} \cdot \overline{AD} = \overline{AM} \cdot \overline{AC}$
- 2) Soient B' , C' et D' les images respectives de M par les projections orthogonales sur (AB), (AC) et (AD). Montrer l'égalité $\overline{AB} \cdot \overline{AB'} + \overline{AD} \cdot \overline{AD'} = \overline{AC} \cdot \overline{AC'}$
- 3) Déterminer et construire l'ensemble des points M de P tels que $\overline{MA} \cdot \overline{AB} + \overline{MA} \cdot \overline{AD} = 0$

Exercice N° 3 :

Soit $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un RON du plan P. On considère les vecteurs $\vec{u} = (\sin \alpha) \vec{i} + (1 + \cos \alpha) \vec{j}$ et

$$\vec{v} = (1 + \cos \alpha) \vec{i} - (\sin \alpha) \vec{j} \text{ où } \alpha \in [0 ; 2\pi]$$

- 1) Calculer $\| \vec{u} \|$ et $\| \vec{v} \|$ en fonction de α
- 2) \vec{u} et \vec{v} sont-ils orthogonaux ?
- 3) Déterminer les réels α pour que (\vec{u}, \vec{v}) soit une base orthonormée de P. Écrire les coordonnées des vecteurs \vec{u} et \vec{v} correspondants.

Exercice N° 4 :

Soient A, B et C trois points non alignés. Quel est l'ensemble des points M tels que :

- 1) $\overline{MA} \cdot \overline{AB} + \overline{MA} \cdot \overline{AC} = 0$
- 2) $\overline{MA} \cdot \overline{MB} + \overline{MA} \cdot \overline{MC} = 0$
- 3) $MA^2 - MB^2 = 4a^2$ tel que $AB = 2a$

Exercice N° 5 :

Soient A et B deux points donnés du plan P et I le point défini par $\overline{AI} + 2 \overline{BI} = \vec{0}$; et C un point de la perpendiculaire à la droite (AB) en I.

On donne $AB = 3$ et $IC = 2$.

- 1) Construire les points A, B, I et C
- 2) Montrer que $CA^2 + 2CB^2 = 18$
- 3) Montrer que $\forall M \in P$

$$MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 18 + 6 \overline{MC} \cdot \overline{CI}$$

- 4) On considère Δ l'ensemble des points M de P tels que $MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 42$
 - a/ Montrer que Δ est une droite dont on précisera la direction.
 - b/ Montrer que Δ est tangente au cercle (C) de centre C et passant par I.

Exercice N° 6 :

Soit P un plan ; A et B deux points distincts de ce plan.

- 1) Construire le point G tel que $\overline{GA} + 2 \overline{GB} = \vec{0}$ et exprimer pour tout M de P le vecteur $\overline{MA} + 2 \overline{MB}$ à l'aide de \overline{MG}
- 2) Quel est l'ensemble (Δ) des points M du plan tels que : $\overline{MA} \cdot \overline{AB} = 2 \overline{MB} \cdot \overline{BA}$
- 3) On suppose que $AB = 3x$ où $x > 0$
 - a/ Exprimer $MA^2 + 2 MB^2$ à l'aide de MG^2 et x
 - b/ En déduire suivant les réels k l'ensemble (C_k) des point M de P tels que $MA^2 + 2 MB^2 = k$

Exercice N° 7 :

Dans le plan P on considère un triangle équilatéral ABC de côté de longueur $a > 0$; $I = B * C$

- 1) Soit G le point défini par $2 \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$
Montrer que $G = A * I$
- 2) Calculer en fonction de a , GA^2 , GB^2 et GC^2
- 3) Déterminer l'ensemble (C) des point M de P tels que $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$
- 4) Soit $J = A * G$

- a/ Montrer que $\forall M \in P$,
 $2MA^2 + \overline{MA} \cdot \overline{MB} + \overline{MA} \cdot \overline{MC} = 4 (MJ^2 - JA^2)$

- b/ Déterminer et construire l'ensemble E défini par $E = \left\{ M \in P / 2MA^2 + \overline{MA} \cdot \overline{MB} + \overline{MA} \cdot \overline{MC} = 3a^2 \right\}$

Exercice N° 8 :

Soit (C) le cercle circonscrit à un triangle ABC, D le point diamétralement opposé à A et I le milieu du segment [BC].

- 1) Montrer que $2 \overline{AI} = \overline{AB} + \overline{AC}$.
- 2) Montrer que $\overline{AD} \cdot \overline{AB} = AB^2$ et que $\overline{AD} \cdot \overline{AC} = AC^2$
- 3) En déduire que $\overline{AD} \cdot \overline{AI} = \frac{AB^2 + AC^2}{2} = AI^2 + BI^2$
- 4) On suppose dans cette question seulement que $AB = 5x$; $AC = 2\sqrt{3} x$ où $x > 0$ et $B\hat{A}C = 30^\circ$
Calculer BC, calculer ensuite la longueur de la médiane AI.

Exercice N° 9 :

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 2a\sqrt{3}$; $AC = 2a$; $a > 0$

- 1) a/ Montrer que $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = -12a^2$
b/ Déduire $\cos(\overline{AB}, \overline{BC})$ puis déterminer une détermination dans l'intervalle $[\pi, 2\pi]$ de l'angle $(\overline{BA}, \overline{BC})$
- 2) Soit (Γ) le cercle de diamètre [AC], la droite (BC) coupe (Γ) en D. Montrer que $\overline{BD} \times \overline{BC} = BA^2$
- 3) Soit M un point variable sur le cercle (Γ) et N un point de P tel que $2 \overline{AN} - \overline{AM} - \overline{AB} = \vec{0}$. Déterminer et construire l'ensemble (Γ') des points N quand M décrit le cercle (Γ)