
Étude d'une suite

Sujet

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 &= -\frac{2}{3} \\ u_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculez u_1 et u_2 .
2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 1$.
 - a) Montrez que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont vous préciserez le premier terme et la raison.
 - b) Déduisez-en l'expression de v_n en fonction de n .
 - c) Exprimez u_n en fonction de n .
3. Déterminez $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Solution

1. $u_1 = -\frac{5}{6}$ et $u_2 = -\frac{11}{12}$.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{3}$.

b) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{1}{3} \times 2^{-n}$$

c) Du résultat précédent on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{3} \times 2^{-n} - 1$$

3. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n} = 0$$

car $|\frac{1}{2}| < 1$. On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$$