Formule du triangle de Pascal

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$$

Démonstration combinatoire

Soit E un ensemble à n éléments et a un élément de E.
Notons :
A l'ensemble des parties de E à p éléments ($p \leq n$),
B l'ensemble des parties à p éléments de E contenant a,
C l'ensemble des parties à p éléments de E ne contenant pas a.
Le cardinal de A est C_n^p.

Comme B est l'ensemble des parties à p-1 éléments de $E - \{a\}$ auxquelles on a ajouté a, le cardinal de B est égal à celui de l'ensemble des parties à p-1 éléments de $E - \{a\}$. D'où Card(A) $= C_{n-1}^{p-1}$.

Comme C est l'ensemble des parties à p éléments de $E - \{a\}$, Card(C) $= C_{n-1}^{p}$.

A étant la réunion disjointe de B et C, on a Card(A)=Card(B)+Card(C), d'où le résultat.

Démonstration directe

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)(n-p-1)!} + \frac{(n-1)!}{p(p-1)!(n-p-1)!}$$

$$= \frac{p(n-1)! + (n-p)(n-1)!}{p(p-1)!(n-p)(n-p-1)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}$$

Démonstration combinatoire

Le coefficient du terme $a^p b^{n-p}$ est égal au nombre de façons de choisir simultanément p paires de parenthèses contenant a parmi les n, soit C_n^p, d'où le résultat (c'est aussi le nombre de façons de choisir simultanément n-p paires de parenthèses contenant b parmi les n, soit C_n^{n-p}. Or $C_n^p = C_n^{n-p}$ …).

Démonstration par récurrence

La formule se vérifie aisément pour n=0.
Supposons qu'elle est vraie pour n fixé et montrons qu'alors $(a+b)^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p a^p b^{n+1-p}$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{p+1} b^{n-p} + \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n+1-p}$$

$$= \sum_{p=1}^{n+1} C_n^{p-1} a^p b^{n-p+1} + \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n+1-p}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} C_n^{p-1} a^p b^{n-p+1} + b^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} C_n^p a^p b^{n+1-p}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \left(C_n^{p-1} + C_n^p\right) a^p b^{n+1-p} + b^{n+1}$$

$= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} C_{n+1}^p a^p b^{n+1-p} + b^{n+1}$, d'après la formule de Pascal, d'où le résultat.

La formule étant vraie pour n=0 et l'étant pour n+1 sous l'hypothèse qu'elle l'est pour n fixé, est donc vraie pour tout entier naturel n en vertu de l'axiome de récurrence.

Une application amusante

Calculons 10016.

$$1001^6 = \sum_{p=0}^{6} C_6^p 1000^p = 1 + C_6^1 \times 1000 + C_6^2 \times 1000000 + C_6^3 \times 1000000000 + C_6^4 \times 1000000000000$$

$$+ C_6^5 \times 1000000000000000 + C_6^6 \times 1000000000000000000$$

=
1+6x1000+15x1000000+20x1000000000+15x1000000000000+6x1000000000000000+1000000000000000000

Nous laissons au lecteur le soin de faire l'addition !

Un résultat remarquable

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n$$

Démonstration 1

Le résultat est immédiat en faisant a=b=1 dans la formule du binôme !

Démonstration 2 (combinatoire)

La somme de tous les C_n^p pour n fixé (la somme de tous les coefficients binomiaux d'une ligne du triangle de Pascal) est égale au nombre de façons de choisir simultanément entre 0 et n éléments d'un ensemble à n éléments, c'est à dire exactement au nombre de parties de cet ensemble, soit 2n.

(on montre directement que le nombre de parties d'un ensemble E à n éléments est 2n en remarquant qu'on peut associer à chaque partie P de E l'application f de E sur {0,1} ainsi définie :
f(x)=0 si x n'est pas un élément de P
f(x)=1 si x est un élément de P.
Comme Card(E)=n et Card({0,1})=2, on a le résultat, puisque le nombre d'applications d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n est np.)
