L.S.B.Amri	Devoir de Synthèse N°3		Sai & Nabti
10-05-2004	Mathématiques	3^H.	4. E.G.-01-02

Exercice N°1 (6 points)

1) Résoudre, dans $\mathbb{R}^3$, *le système :(S)* $\begin{cases} 4x-2y+z=4 \\ x+y+z=13 \\ x-y+z=1 \end{cases}$

2) Soit a, b et c des réels et f l'application de $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$ *définie par :*

f (z) = z^3+az^2+bz+c.

a)-Déterminer les réels a, b et c pour que l'on ait :

$$\begin{cases} f(-1)=0 \\ f(1)=14 \\ f(-2)=-4 \end{cases}$$

b)-Vérifier que l'on a : f (z)= (z+1) (z^2 *+2z+4).*

3)-Résoudre, dans $\mathbb{C}$ *, l'équation : (z+1) (z*^{2} *+2z+4)=0.*

4)-Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On donne les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A=-1$; $z_B=-1+i\sqrt{3}$ *et* $z_C=-1-i\sqrt{3}$.

a)-Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes z_B *et* z_C.

b)-Placer dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ *les points A, B et C.*

c)-Montrer que le point A est le milieu du segment $[BC]$.

Exercice N°2(6 points) :

Soit la suite (U_n) *définie par* $\begin{cases} U_0=3 \\ U_{n+1}=4(1-\dfrac{1}{U_n}) \text{ pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1) a) *Calculer* U_1 *et* U_2.
   b) *Montrer que la suite* (U_n) *n'est ni une suite arithmétique ni géométrique.*
2) *Montrer par récurrence que pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *on a :* $U_n\geq 2$.
3) a) *Montrer que pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *on a :* $U_{n+1}-U_n=-\dfrac{(2-U_n)^2}{U_n}$.
   b) *En déduire la monotonie de* (U_n).
4) a) *Montrer que la suite* (U_n) *est convergente.*
   b) *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

5) *Soit la suite* (V_n) *définie par :* $V_n = \dfrac{1}{U_n - 2}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

a) *Montrer que la suite* (V_n) *est une suite arithmétique de raison* $r = \dfrac{1}{2}$ *et préciser le premier terme.*

b) *Déterminer alors* V_n *en fonction de n.*

6) a) *En déduire* U_n *en fonction de n.*

b) *Retrouver, alors,* $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

<u>Problème (8 points):</u>

A) *Soit la fonction g définie sur* $]0,+\infty[$ *par g(x) =* $x^2 + 1 - Logx$..

1) *Dresser le tableau de variation de g.*

2) *En déduire que pour tout* $x \in]0,+\infty[$, *on a :* $g(x) \succ 0$.

B) *Soit la fonction f définie sur* $]0,+\infty[$ *par f(x)=* $x + 2 + \dfrac{Logx}{x}$.

1)a)-*Montrer que f est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et que pour tout* $x \in]0,+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) *Dresser le tableau de variation de f.*

2) *On désigne par (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$ *du plan.*

a) *Montre que La droite* Δ *: y=x+2 est une asymptote oblique à (C) au voisinage de* $+\infty$.

b) *Etudier la position de (C) et* Δ.

c) *Tracer (C) et* Δ.

3) *Calculer l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C), la droite* Δ *et les droites d'équations respectives : x=1 et x=e.*

<u>BON TRAVAIL</u>