

Etudes de fonctions

4 A

Exercice 1

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^3 + x - 1$

- 1- Dresser le tableau de variation de f .
- 2- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0, 1]$.
- 3- En déduire le signe de $f(x)$.
- 4- Soit la fonction g définie par : $g(x) = x^4 + 2x^2 + 4x + 1$.
 - a) Vérifier que $g'(x) = -4f(-x)$ et $g'(\alpha) = 8$.
 - b) Dresser, alors, le tableau de variation de g .

Exercice 2

A) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) Vérifier que f est définie sur $D =]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$.
- 2) Montrer que la droite $\Delta : x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie à (C_f) .
- 3) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0, +\infty[$.
- 4) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$.
- 5) Montrer que la droite $\Delta' : y = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.
- 6) Tracer la courbe (C_f) . Construire les demi-tangentes à (C_f) en O et $A(-1, 0)$.

B) Soit g la restriction de f sur $[0, +\infty[$.

- 1) Montrer que g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
- 2) Etudier la continuité et la dérivabilité de g^{-1} sur J .
- 3) Calculer $g(1)$ et en déduire $(g^{-1})'(\sqrt{2})$.

Exercice 3:

A) Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 .

3) Montrer que pour tout $x < 0$: $f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$ et que $f'(x) > 0$

pour tout $x < 0$.

4) Dresser le tableau de variation de f .

5) Tracer la courbe représentative (C_f) de f dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

B) Soit g la restriction de f sur $] -\infty, 0[$.

1) Montrer que g réalise une bijection de $] -\infty, 0[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de g^{-1} sur J .

3) Calculer $g(-\frac{4}{3})$ et en déduire $(g^{-1})'(-\frac{1}{2})$.

4) Tracer la courbe représentative (C') de g^{-1} dans le même repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.