

Fonctions exponentielles

Problème 01

Partie A

- 1) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x + 1 - e^x$.
 - a) Dresser le tableau de variation de g .
 - b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R} : e^x - x \geq 1$.
- 2) Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = -xe^x + 1$.
 - a) Dresser le tableau de variation de h .
 - b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α . Vérifier que $0,5 < \alpha < 0,6$.
 - c) Préciser alors le signe de $h(x)$ en fonction de x .
- 3) On pose pour tout entier naturel n supérieur ou égal à deux ; $u_n = \int_0^{\text{Log}(n)} h(-t) dt$.
 - a) Calculer u_n en fonction de n .
 - b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{\text{Log} n} \right)$.

Partie B

- 1) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 - a) Justifier que f est définie sur \mathbb{R} .
 - b) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et que pour tout $x \in \mathbb{R} : f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x)^2}$.
 - c) Dresser le tableau de variation de f .
- 2)
 - a) Ecrire l'équation de la tangente Δ à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.
 - b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) - (x + 2) = \frac{(x + 1)g(x)}{e^x - x}$.
 - c) En déduire la position de la courbe (C_f) par rapport à la tangente Δ .

3) a) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}$.

b) Construire la courbe (C_f) et la tangente Δ (on prendra $\alpha \approx 0,55$).

Problème 02

Partie A

I. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x-1)e^{(2-x)}$.

C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Etudier les variations de f puis construire sa courbe C .

2) a- Soit $\alpha \in]1, +\infty[$.

Calculer l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan limitée par C et les droites d'équations :
 $y=0$, $x=1$ et $x=\alpha$

b- Calculer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

II. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ g_n la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $g_n(x) = (x-1)^n e^{(2-x)}$

et C_n sa courbe représentative dans le repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j})

1) a- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = 0$

b- Dresser le tableau de variation de g_n (on distinguera les cas n pair et n impair)

c- En déduire que pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a : $0 \leq g_n(x) \leq e^{1-n} n^n$

2) a- Etudier la position relative de C_2 par rapport à la courbe C de f .

b- Construire C_2 .

Partie B

$f_n :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f_n(x) = \frac{1}{g_n(x+2)} = \frac{e^x}{(x+1)^n}$$

1. Montrer que pour tout $x > -1$ $f_n'(x) = f_n(x) - n f_{n+1}(x)$

2. Pour tout entier naturel non nul n on pose : $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$

3. Montrer que I_n est décroissante et qu'elle est convergente.

4. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq I_n \leq \frac{e}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

5. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = n I_{n+1} - 1 + \frac{e}{2^n}$

b) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_{n+1}$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$

Partie C

Soit F la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $F(x) = \int_x^{x+1} \frac{f(t)}{(t-1)^2} dt = \int_x^{x+1} \frac{e^{2-t}}{t-1} dt$

1/ a) Montrer que la fonction F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que

$$F'(x) = \frac{e^{1-x} [(e-1)x + 1]}{x(1-x)}$$

b) En déduire le sens de variation de F sur $]1, +\infty[$.

2/ a) A l'aide de la fonction f montrer que $0 \leq \frac{e^{2-t}}{t-1} \leq \frac{1}{(t-1)^2}$ pour $t \in]1, +\infty[$

b) En déduire que pour tout $x \in]1, +\infty[$ on a

$$0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x(x-1)} \text{ calculer alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$$

3/ a) Montrer que pour tout $x \in]1, 2]$ et pour tout $t \in [x, x+1]$ on a : $\frac{e^{2-t}}{t-1} \geq \frac{e^{2-x}}{t-1}$

b) En déduire que $F(x) \geq e^{(1-x)} [\text{Log} x - \text{Log}(x-1)]$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$

c) Dresser le tableau de variation de F