Calcul intégral **SAI.Fethi**

Exercice 1:

Soit $I_0 = \int_0^1 e^{-x}\,dx$ **et** $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

1) **Calculer** I_0 *et* I_1 **.**
2) **a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :** $\forall n \in \mathbb{N}^* : I_{n+1} = -e^{-1} + (n+1)I_n$.

   b) En déduire que : $I_2 = 2 - 5e^{-1}$.

   c) Donner la valeur de $E = \int_0^1 (5x^2 + x - 3)e^{-x}\,dx$.
3) **a) Montrer que** $\forall x \in [0,1]$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n$.

   b) Montrer que la suite (I_n **) est décroissante.**

   c) Montrer que la suite (I_n **) est convergente.**

   d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

   e) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Exercice 2:

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$ $\qquad$ $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$ $\qquad$ $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$

1) Calcul de I

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ **par** $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$.

a) **Calculer la dérivée f' de f.**

b) **Calculer la valeur de I.**

2) Calcul de J et de K.

a) **Sans calculer explicitement J et K, vérifier que J + 2I = K.**

b) **A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, Montrer que K** $= \sqrt{3} - J$.

c) **En déduire les valeurs de J et K.**

Exercice 3:

A) Résoudre dans l'ensemble des nombres réels :

$(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$

$\ln(x^2 - 2e) = 1 + \ln x$

B) On pose :

$I = \int_1^e x(\ln x)\,dx$ et $J = \int_1^e x(\ln x)^2\,dx$

A l'aide d'une intégration par parties calculer la valeur exacte de I.

1. A l'aide d'une intégration par parties et du calcul de I calculer la valeur exacte de J.