

FONCTION CONTINUE ET STRICTEMENT MONOTONE

EXERCICE 01

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} , calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Dresser alors, le tableau de variation de f .

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$.

3) a) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on déterminera. On note f^{-1} sa fonction réciproque.

b) Montrer que f^{-1} est continue sur J .

c) Déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1} .

4) Tracer dans un même repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) les courbes de f et f^{-1} .

5) a) calculer $f(1)$ puis $(f^{-1})'(1 + \sqrt{2})$.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

c) Retrouver $(f^{-1})'(1 + \sqrt{2})$.

EXERCICE N°2 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$.

6) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} , calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Dresser alors, le tableau de variation de f .

7) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x)$.

8) a) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on déterminera. On note f^{-1} sa fonction réciproque.

b) Montrer que f^{-1} est continue sur J .

c) Déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1} .

9) Tracer dans un même repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) les courbes de f et f^{-1} .

10) a) calculer $f(0)$ puis $(f^{-1})'(-1)$.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

c) Retrouver $(f^{-1})'(-1)$.

EXERCICE 3

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x\sqrt{1-x^2} & \text{si } x \in [0,1] \\ f(x) = x-1+\sqrt{x^2-1} & \text{si } x \in]1;+\infty[\end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue en 1, est elle dérivable en 1?
- 2) Calculer f' sur chacun des intervalles]0,1[et]1;+\infty[.
- 3) dresser le tableau de variation de f.
- 4) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)]$, que peut on conclure. Tracer la courbe C de f.
- 5) Soit g la restriction de f à l'intervalle]1;+\infty[, montrer que g réalise une bijection de]1;+\infty[sur un intervalle J que l'on précisera.
- 6) Expliciter $g^{-1}(x)$.

Exercice N°4

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + 3x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- 1- Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
En déduire le domaine de continuité et de dérivabilité de f.
- 2- Montrer que l'équation $f(x)=0$, admet une solution

$$\alpha \text{ et une seule dans l'intervalle }]-1,0[.$$

3-a- Montrer que pour tout $x > 0$ $f(x) = \frac{-x}{1 + \sqrt{1+x^2}}$.

-b- Montrer que pour tout $x > 0$ $-1 \leq f(x) \leq \frac{-x}{2+x}$.

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice N°5:

Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Etudier les variations de g.

Exercice N°6 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 4}$.

1-a-Déterminer le domaine de définition de f.

-b-Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

-c-Montrer que la courbe (ζ) de f admet deux asymptotes obliques que l'on déterminera.

2-a-Etudier la dérivabilité de f en 2 et -2 puis interpréter graphiquement les résultats.

-b-calculer $f'(x)$.

-c-Montrer que pour tout $x \in]-\infty, -2[$: $f'(x) = \frac{3x^2 - 16}{\sqrt{x^2 - 4}(2\sqrt{x^2 - 4} - x)}$.

3-a-Dresser le tableau de variation de f.

-b-Tracer (ζ).

Exercice 07 :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} \frac{2(x+1)}{2-x} & \text{si } x \leq 0 \\ x+2-\cos\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1/ a – Calculer la limite de f en $-\infty$.

b – Montrer que pour tout $x > 0$, on a $f(x) > x + 1$. Puis en déduire la limite de f en

$+\infty$.

2/ a – Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

b – Montrer que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = \frac{3}{2}$

c – Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter le résultat trouvé géométriquement

3/ a – Montrer que f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

b – En déduire que f est une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on déterminera.

c – Déterminer l'image par f de l'intervalle $] -1 ; +\infty [$

Exercice 08

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 1}$.

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) Etudier les variations de f.

3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$.

b) Etudier la position de la courbe (C) de f par rapport à la droite D dont une équation est : $y = 2x + 1$.

4) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on déterminera.

5) a) Calculer $f(0)$ puis $(f^{-1})'(2)$.

6) Construire (C) et (C') dans le même repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

7) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 09 :

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$$

- 1) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un interval J que l'on déterminera.
b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.
- 3) $h(t) = f(\cos^2 2t); t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.
 - a) Exprimer $h(t)$ en fonction de tgt .
 - b) Calculer $h'(t)$ par deux méthodes.

Exercice 10 :

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

- 1) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) Soit g la restriction de f sur $[0, +\infty[$.
Montrer que g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.
- 3) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

Exercice 11 :

Soit la fonction f définie sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{1}{1 + \sin x}$.

- 1) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) Montrer que f réalise une bijection de I sur un interval J que l'on déterminera.
- 3) Etudier la dérivabilité de f^{-1} puis calculer $(f^{-1})'(x)$.

Exercice 12 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

- 1) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un interval J que l'on déterminera.
- 3) a) Calculer $(f^{-1})'(1)$.
b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 13:

Soit la fonction f définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

- 1) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) Montrer que f réalise une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur un interval J que l'on déterminera.
- 3) a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$.
b) Montrer que pour tout $x \in]1, +\infty[: (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

Exercice 14:

Soit la fonction f définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \frac{1}{\sin x}$.

- 1) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) Montrer que f réalise une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur $]1, +\infty[$.
- 3) a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$.
b) Montrer que pour tout $x \in]1, +\infty[: (f^{-1})'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

Exercice 15:

Soit la fonction f définie sur $]0, 2[$ par $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)$

- 1) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) Montrer que f réalise une bijection de $]0, 2[$ sur un interval J que l'on déterminera.
- 3) a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur \mathbb{R} .
b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} : (f^{-1})'(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)}$.
- 4) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on pose $g(x) = (f^{-1})'(x) + (f^{-1})'\left(\frac{1}{x}\right)$.
 - c) Vérifier que g est dérivable sur \mathbb{R}^* .
 - d) Calculer $g'(x)$.
 - e) En déduire que $g(x)$ est constante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Exercice 16:

Soit la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \operatorname{tg}x$.

- 1) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) Montrer que f réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur un interval J que l'on déterminera. On note g la fonction réciproque de f .
- 3) a) Déterminer $g(0), g(1), g(\sqrt{3})$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

b) Montrer que pour tout $x \in J : (g)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

4) Soit la fonction h définie par :
$$\begin{cases} h(x) = \frac{g(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

Montrer que h est continue sur \mathbb{R} .

5) Soit la fonction k définie sur \mathbb{R} par : $k(x) = g(x^2) - g(\pi x)$.

a) Calculer $k'(x)$.

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{g(x^2) - g(\pi x)}{x - \pi}$.

6) a) Dresser les tableaux de variations des fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$u(x) = x - g(x) \quad \text{et} \quad v(x) = x - \frac{x^3}{3} - g(x).$$

b) En déduire que pour tout $x \in [0, +\infty[: 0 \leq x - g(x) \leq \frac{x^3}{3}$.

BON TRAVAIL