

Exercice 1

On considère la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par : $U_0=2$ et $U_{n+1} = \frac{3U_n-1}{2U_n}$.

- 1) Montrer que pour tout entier naturel n on a $U_n > 1$.
- b) Montrer que (U_n) est une suite décroissante.
- c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et trouver sa limite.

2) Soit (v_n) la suite définie sur \mathbb{N} par : $v_n = \frac{2U_n-2}{2U_n-1}$.

- a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.
- b) Exprimer v_n en fonction de n . En déduire u_n en fonction de n .
- c) Retrouver alors la limite de la suite (U_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} u_0 = 2\sqrt{5} \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 5}{2u_n} \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n > \sqrt{5}$.
- b) Montrer que (u_n) est décroissante.
- c) Déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

2) Soit la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par $v_n = \frac{u_n - \sqrt{5}}{u_n + \sqrt{5}}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = v_n^2$.

- 3) On considère la suite (w_n) définie sur \mathbb{N} par : $w_n = \text{Log}(v_n)$.
 - a) Montrer que w_n est une suite géométrique de raison 2.
Exprimer w_n en fonction de n .
 - b) Déduire v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n .
 - c) Retrouver alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 3

1) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de l'intégrale : $\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx$.

2) On pose : $U_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 0$ et $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n+1}$.

b) Calculer U_0 . En déduire U_1 et U_2 .

c) Étudier la monotonie de la suite (U_n) .

d) En déduire que la suite (U_n) est convergente.

3) a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < \frac{1}{n+1}$.

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.