Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème 01 :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème 02 :(Théorème des valeurs intermédiaires) :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Soit a et b deux réelles de I tels que a<b. Pour tous réel k compris entre f(a) et f(b) l'équation f(x)=k admet au moins une solution dans $[a,b]$.

En particulier, si f(a) .f(b) <0 alors l'équation f(x)=0 admet au moins une solution dans $]a,b[$.

Théorème 03:(C'est un corollaire du Théorème des valeurs intermédiaires).

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

Soit a et b deux réelles de I tels que a<b. Pour tous réel k compris entre f(a) et f(b) l'équation f(x)=k admet une unique solution dans $[a,b]$.

Théorème 04:

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Si la fonction f ne s'annule en aucun point de I alors f garde un signe constant sur I.

Théorème 05:

L'image d'un intervalle fermé borné $[a,b]$ par une fonction continue est un intervalle fermé borné $[m,M]$. (Notation : $f([a,b]=[m,M]$).

Le réel m est le minimum de f sur $[a,b]$.

Le réel M est le maximum de f sur $[a,b]$.

Théorème 06:

1. Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $I=[a,b[\ (a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R})$

   - Si la fonction f est croissante et majorée alors :

     $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=l\in\mathbb{R}$.

   - Si la fonction f est croissante et non majorée alors :
     $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=+\infty$.

2. Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $I=[a,+\infty[\ (a\in\mathbb{R})$:

   - Si la fonction f est croissante et majorée alors :

     $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$.

   - Si la fonction f est croissante et non majorée alors :
     $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$.

3. Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $I=]a,b](a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R})$:

   - Si la fonction f est décroissante et minorée alors :

     $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l\in\mathbb{R}$.

   - Si la fonction f est décroissante et non minorée alors :

     $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$.

4. Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $I=]-\infty,b](b\in\mathbb{R})$:

- Si la fonction f est décroissante et minorée alors :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$.

- Si la fonction f est décroissante et non minorée alors :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Image d'un intervalle I par une fonction f continue et monotone sur I

Intervalle I	Si f est croissante sur I	Si f est décroissante sur I
$I = [a,b]$	$f(I) = [f(a), f(b)]$	$f(I) = [f(b), f(a)]$
$I = [a,b[\ (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$	$f(I) = \left[f(a), \lim\limits_{x \to b^-} f(x) \right[$	$f(I) = \left] \lim\limits_{x \to b^-} f(x), f(a) \right]$
$I = [a,+\infty[\ (a \in \mathbb{R})$	$f(I) = \left[f(a), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \right[$	$f(I) = \left] \lim\limits_{x \to +\infty} f(x), f(a) \right]$
$I =]a,b[\ (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$	$f(I) = \left] \lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to b^-} f(x) \right[$	$f(I) = \left] \lim\limits_{x \to b^-} f(x), \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \right[$
$I =]-\infty,b] (b \in \mathbb{R})$	$f(I) = \left] \lim\limits_{x \to -\infty} f(x), f(b) \right]$	$f(I) = \left[f(b), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \right[$
$I =]-\infty,+\infty[\ = \mathbb{R}$	$f(I) = f(\mathbb{R}) = \left] \lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \right[$	$f(I) = f(\mathbb{R}) = \left] \lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \right[$
$I =]-\infty,b[\ (b \in \mathbb{R})$	$f(I) = \left] \lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to b^-} f(x) \right[$	$f(I) = \left] \lim\limits_{x \to b^-} f(x), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \right[$
$I =]a,+\infty[\ (a \in \mathbb{R})$	$f(I) = \left] \lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \right[$	$f(I) = \left] \lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \right[$
$I =]a,b] (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$	$f(I) = \left] \lim\limits_{x \to a^+} f(x), f(b) \right]$	$f(I) = \left[f(b), \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \right[$

mardi 22 juillet 2008