Fiche Dérivabilité **Sai-Fethi 2007-2008**

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Fonction dérivée	Intervalle
$x \mapsto a$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n, n \prec 0.$	$x \mapsto nx^{n-1}$	**Tout intervalle inclus dans** $\mathbb{R}^*$.
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \frac{-1}{x^2}$	**Tout intervalle inclus dans** $\mathbb{R}^*$.
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$
$x \mapsto$ **sin (a x+b)**	$x \mapsto$ **a cos (a x+b)**	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ **cos (a x+b)**	$x \mapsto$ **-a sin (a x+b)**	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x \mapsto$ **tgx**	$x \mapsto 1+\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	**Tout intervalle inclus dans** $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Opérations sur les fonctions dérivables

- $(f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$.
- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- $(fog)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$.
- $(\frac{1}{f})'(x) = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}; f(x) \neq 0.$
- $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x) \times g(x) - g'(x) \times f(x)}{g^2(x)}; g(x) \neq 0$

$$(\sqrt{f})'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \; ; \; f(x) \succ 0.$$

$$(f^n)'(x) = n \times f^{n-1}(x) \times f'(x).$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \; ; \; y = f^{-1}(x) \; ; \; x = f(y).$$

Dérivabilité d'une fonction en un point a
($a \in D_f$)

1. $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \in \mathbb{R}$ **alors f est dérivable en a et f'(a)=l**
2. $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ **ou** $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ **alors f n'est pas dérivable en a.**

Interprétation géométrique :

Si $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ **alors la courbe de f admet au point A (a, f (a)) une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.**	Si $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ **alors la courbe de f admet au point A (a, f (a)) une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.**
Si $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ **alors la courbe de f admet au point A (a, f (a)) une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.**	Si $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ **alors la courbe de f admet au point A (a, f (a)) une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.**

- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = b; b \in \mathbb{R}$ **alors la courbe de f admet au point** $A(x_0, f(x_0))$ **une tangente T** $: y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.
- $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = b; b \in \mathbb{R}$ **la courbe de f admet au point** $A(x_0, f(x_0))$ **une demi tangente T** $: \begin{cases} y = f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$.
- $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = b; b \in \mathbb{R}$ **la courbe de f admet au point** $A(x_0, f(x_0))$ **une demi tangente T** $: \begin{cases} y = f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$.