

Fonctions paires

- **Définition** : Une fonction f de domaine de définition D_f est paire si et seulement si, pour tout x de D_f on a $(-x) \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.
 $D_f = D_1 \cup D_2$ avec $D_1 \subset \mathbb{R}^+$ et $D_2 \subset \mathbb{R}^-$; D_1 et D_2 sont symétrique par rapport à 0.
- **Domaine d'étude** : On étudie une fonction paire f sur D_1 par exemple ; l'étude de f sur D_2 s'en déduit :
 - * Si f est croissante sur D_1 alors f est décroissante sur D_2 .
 - * Si f est décroissante sur D_1 alors f est croissante sur D_2 .

- **Représentation graphique** :

Soit C la courbe représentative d'une fonction paire f dans un plan rapporté à un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On a $C = C_1 \cup C_2$ avec C_1 la partie de C correspondant à D_1 et C_2 la partie de C correspondant à D_2 ; C_1 et C_2 sont symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

- **Axe de symétrie** : Soit f une fonction définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$ et soit (C) sa courbe représentative relativement à un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 La droite $\Delta : x = a$ est un axe de symétrie pour la courbe (C) si et seulement si pour tout x de D , on a $(2a-x) \in D$ et $f(2a-x) = f(x)$.

Fonctions impaires :

- **Définition** :
 Une fonction f de domaine de définition D_f est impaire si et seulement si, pour tout x de D_f on a $(-x) \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.
 $D_f = D_1 \cup D_2$ avec $D_1 \subset \mathbb{R}^+$ et $D_2 \subset \mathbb{R}^-$; D_1 et D_2 sont symétrique par rapport à 0.
- **Domaine d'étude** :
 On étudie une fonction impaire f sur D_1 par exemple, l'étude de sur D_2 s'en déduit :
 Si f est croissante sur D_1 alors f est décroissante sur D_2 . Si f est décroissante sur D_1 alors f est croissante sur D_2 .

- **Représentation graphique** :

Soit C la courbe représentative d'une fonction impaire f dans un plan rapporté à un repère cartésien (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On a $C = C_1 \cup C_2$; C_1 et C_2 sont symétrique par rapport au point O .

Centre de symétrie :

Soit $I(a, b)$ et (C) la courbe représentative d'une fonction f relativement dans un repère cartésien (O, \vec{i}, \vec{j}) f définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$;

$I(a,b)$ est un centre de symétrie de (C) si et seulement si pour tout x de D on a :
 $(2a-x) \in D$ et $f(2a-x) = 2b - f(x)$.

Fonctions périodiques :

Définition :

Soit une fonction numérique définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$. La fonction f est périodique s'il existe un réel a non nul tel que : Pour tout x de D on a :

$$(a+x) \in D \quad \text{et} \quad f(a+x) = f(x) \quad (*)$$

Le réel a est appelé période de f , et dans le cas où c'est le plus petit réel strictement positif vérifiant :

(*) ; On l'appelle la période de f :

On dit que f est une fonction T périodique ou périodique de période T .

- Les fonctions $x \rightarrow \cos(ax+b)$ et $x \rightarrow \sin(ax+b)$; $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ sont périodiques de période $\frac{2\pi}{|a|}$.
- la fonction $x \rightarrow tg(ax+b)$; $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ sont périodiques de période $\frac{\pi}{|a|}$.

• Domaine d'étude et courbe représentative :

Pour l'étude d'une fonction f ; T périodique sur un domaine D , il suffit de restreindre à un ensemble D_0 de la forme : $[x_0, x_0 + T] \cap D$.

La courbe représentative de f sur D se déduit de celle de la restriction de f à D_0 par des translations de vecteur $kT\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$

Extremas :

• Définition :

Soit f une fonction définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$ et soit x_0 un élément de D . On dit que la fonction f admet un minimum relatif (respectivement un maximum relatif) en x_0 si et seulement s'il existe un intervalle ouvert J de centre x_0 tel que pour tout x de $J \cap D$, on ait : $f(x) \geq f(x_0)$ (respectivement $f(x) \leq f(x_0)$).

On dit que $f(x_0)$ est un extremum relatif si c'est un maximum relatif ou un minimum relatif.

Si pour tout x de D , on a $f(x) \geq f(x_0)$ (respectivement $f(x) \leq f(x_0)$), on dit que $f(x_0)$ est un minimum absolu (respectivement un maximum absolu) de f .

Un minimum absolu ou un maximum absolu est un extremum absolu.

• Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I .

- 1) Si f admet un extremum relatif en un point x_0 de I alors $f'(x_0) = 0$
- 2) Si f s'annule en un point x_0 de I en changeant de signe alors f admet un extremum relatif en x_0 .

Point d'inflexion :

• Définition :

Soit (C) la courbe représentative d'une fonction f , dans un plan rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Un point I de (C) est un point d'inflexion de (C) si et seulement si (C) traverse sa tangente en I.

• **Théorème :**

Soit x_0 un réel et f une fonction deux fois dérivables sur un intervalle ouvert contenant x_0 . Si f'' s'annule en x_0 , en changeant de signe, alors le point M_0 de la courbe représentative (C) de f d'abscisse x_0 , est un point d'inflexion de (C).

Point anguleux :

Si (C) admet deux demi-tangentes sécantes en $M_0(x_0, f(x_0))$ alors ce point est dit anguleux.

Branches infinies :

Soit f une fonction et (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit M un point de (C) de coordonnées (x, y).

* Si x ou y tend vers l'infini, on dit que (C) admet une branche infinie.

* Si (C) s'approche d'une droite sous certaines conditions, on dit que cette droite est une asymptote à (C).

• **Asymptotes parallèles à l'axe des abscisses :**

La droite d'équation $y=b$ est une asymptote à la courbe C si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=b \text{ ou } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=b ; (b \in \mathbb{R}).$$

Remarque : le signe de $f(x)-b$ détermine la position de (C) par rapport à son asymptote.

• **Asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées:**

La droite d'équation $x = a$, ($a \in \mathbb{R}$), est une asymptote à la courbe C si et seulement

$$\text{si : } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)=-\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)=+\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)= +\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)= -\infty.$$

• **Asymptotes obliques :**

La droite $D : y = ax + b ; a \neq 0$ est une asymptotes obliques à la courbe représentative (C) de f si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=+\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)-(ax+b)]=0 \text{ ou } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=-\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)-(ax+b)]=0.$$

Remarque :

le signe de $f(x) - (ax+b)$ permet de situer la courbe représentative (C) de f par rapport à son asymptote.

Théorème :

Soit f une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=\pm \infty$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=\pm \infty$. La droite d'équation

$y=ax+b$, ($a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$) est une asymptote oblique à la courbe représentative (C) si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}=a \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)-ax)=b \text{ ou } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}=a \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)-ax)=b.$$

Directions asymptotiques

Soit (C) la courbe représentative d'une fonction f vérifiant :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm \infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm \infty. \text{ Soit } M(x, f(x)) \in (C);$$

Il arrive que la courbe représentative (C) de f n'admette pas d'asymptote. Cependant la droite (OM) tends vers une position limite. On dit alors que la courbe admet une direction asymptotique.

Définition :

Soit (C) la courbe représentative d'une fonction f vérifiant :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm \infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm \infty.$$

*On dit que la droite d'équation $y = ax$, ($a \in \mathbb{R}$), est une direction asymptotique de (C) si:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = \pm \infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \pm \infty$$

*On dit que l'axe des ordonnées (la droite d'équation : $x=0$) est une direction asymptotique de (C) si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

Plan d'étude d'une fonction :

Généralement, on étudie une fonction selon le plan suivant :

- 1) Détermination des domaines de définition et de continuité de la fonction.
 - 2) Choix d'un domaine d'étude qui tient compte des particularités éventuelles de la fonction :(parité, périodicité,...).
 - 3) Calcul éventuelle des limites aux bornes du domaine d'étude et détermination des branches infinies.
 - 4) Etude de la dérivabilité de f dans le domaine d'étude, calcul de la fonction dérivée, étude de son signe et détermination sens de variation de f.
On dressera ensuite un tableau de variation dans lequel seront consignées les principaux résultats dégagés ainsi que les extrema éventuels de f.
 - 5) Détermination éventuelle des points anguleux et des demi-tangentes.
- Constructions de la courbe représentative (C) de la fonction f dans un plan rapporté à un repère \mathcal{R} ; en indiquant les propriétés remarquable de (C)
(Axes ou centres de symétries, points d'inflexions s'ils sont demandés, tangentes ou demi-tangentes en des points particuliers....).

SAI.Fethi