L.S.B.AMRI **FETHI.SAI**

Intégrale d'une fonction continue

Soient f une fonction continue sur $[a,b]$, et F l'une quelconque de ses primitives.
L'intégrale de f de a à b est le réel F (b)-F (a).
Notation: $\int_a^b f(x)dx$ (lire" intégrale de f de a à b" ou "somme de f de x d x").
On dispose le calcul ainsi: $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemples: $\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$

En premier approche, le dx sert à indiquer que x est la variable d'intégration.
La variable x appartient à $[a,b]$.C'est une variable muette: il n'y a aucun inconvénient à la remplacer par une autre lettre disponible: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$.
Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue:

- $\int_a^a f(x)dx = 0.$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
- $\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$ (Relation de Chasles).
- $\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$ (k étant une constante).
- $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
- $\int_a^b (f(x)-g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.
- $\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt.$

Intégration par parties:

$\int_a^b u'(x).v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x).v'(x)dx.$

Cette méthode est à essayer lorsque la fonction à intégrer se présente sous forme d'un produit, après avoir envisager u'. u ^{n} .

- Si $f(x) \geq 0$ $pour\ tout\ x \in [a,b], alors \int_a^b f(x)dx \geq 0.$
- Si $f(x) \geq g(x)$ $pour\ tout\ x \in [a,b], alors \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$
- $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$
- Si $|f(x)| \leq M$ $pour\ tout\ x \in [a,b], alors \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M.(b-a).$

La valeur moyenne de f sur $[a,b] est : \overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$

Si $m \leq f(x) \leq M$ $pour\ tout\ x \in [a,b], alors m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$

Ou encore:

Si $m \leq f(x) \leq M$ *pour tout* $x \in [a,b]$, *alors* $m \leq \overline{f} = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$.