Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle. **Sai Fethi**

- $f : I \to J$ $\quad\quad$ $g : J \to I$

  $x \mapsto y = f(x)$ $\quad\quad$ $x \mapsto y = g(x)$

(f et g sont deux fonctions réciproques) signifie ($(f \circ g(x)) = x$ *et* $(g \circ f(x)) = x$))

g se note f^{-1} et on a : $\begin{pmatrix} y = f(x) \\ x \in I \\ y \in J \end{pmatrix}$ *signifie* $\begin{pmatrix} x = f^{-1}(y) \\ x \in I \\ y \in J \end{pmatrix}$

- Soit f une fonction définie sur un intervalle I :
  - Si f est strictement monotone sur I alors f réalise une bijection de I sur f(I).
  - La réciproque f^{-1} est strictement monotone sur f(I) et a le même sens de variation que f.
  - Si f est continue sur I alors f^{-1} est continue sur f(I).
- F une bijection de I sur f(I) ; $x_0 \in I$ *tel que* $f(x_0) = y_0$.
  - Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et on a :

    $$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

  - Si f est dérivable sur I et $f'(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in I$ alors f^{-1} est dérivable f(I)

    et on a : $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ *pour tout* $y \in f(I)$.
- f une bijection de I sur f(I) ; $x_0 \in I$ *tel que* $f(x_0) = y_0$.
  - Si $\lim\limits_{x \to x_0^{...}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = ...\infty$ alors

    $$\lim_{y \to y_0^{...}} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0^{...}} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0^{...}} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = 0.$$

  - Si $\lim\limits_{x \to x_0^{...}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ alors

    $$\lim_{y \to y_0^{...}} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0^{...}} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0^{...}} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \infty.$$
- Dans un repère orthonormé la courbe (C')de f^{-1} est la symétrie par rapport à la droite Δ d'équation y = x de la courbe (C)de f : $(C') = S_\Delta(C); \Delta : y = x.$