Coloriage d'un graphe

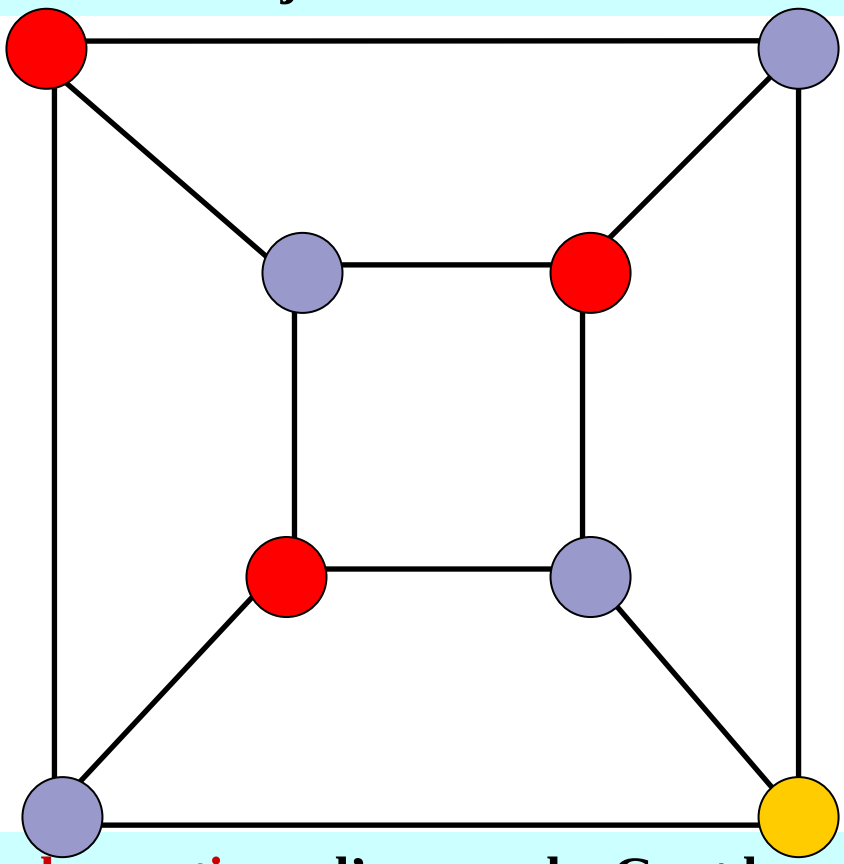
nombre chromatique

Bacha Samy

CREFOC Radès

Un graphe coloré est un graphe tel que

- **une couleur est attribuée à chaque sommet,**
- **deux sommets adjacents sont de couleurs distinctes.**



Le nombre chromatique d'un graphe G est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour en faire un graphe coloré.

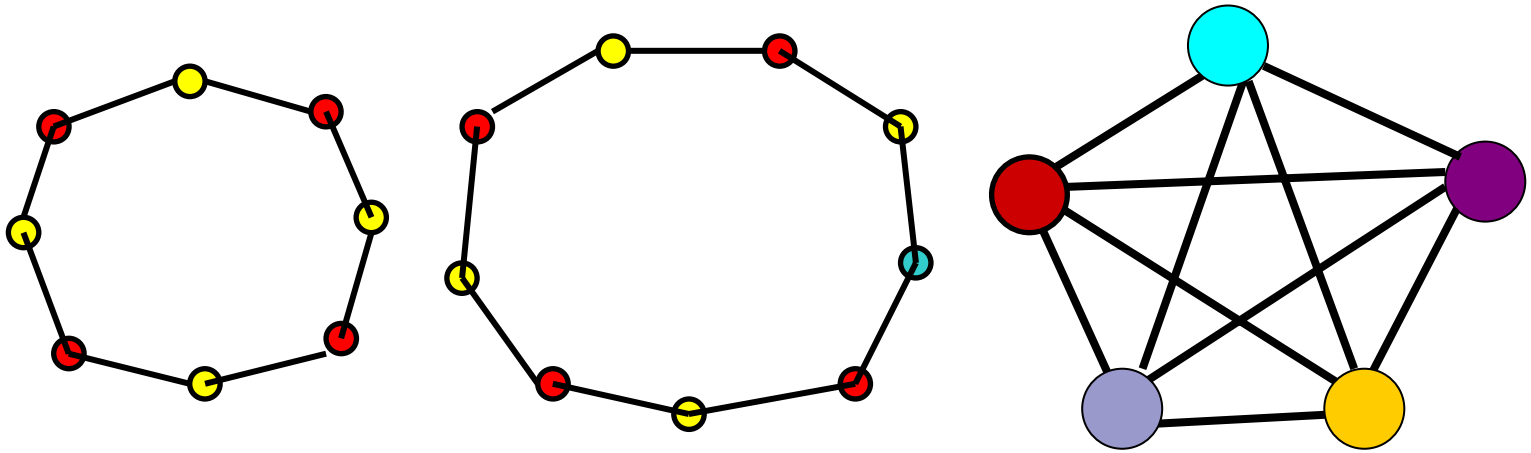
On le note $\gamma(G)$

Soit G = (X , A) un graphe simple

Si G est un cycle d'ordre 2n alors $\gamma(G) = 2$

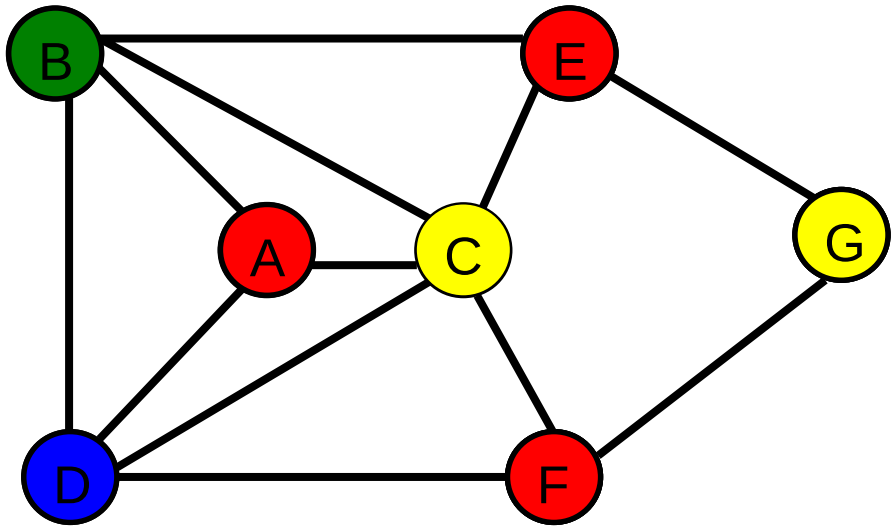
Si G est un cycle d'ordre 2n+1 alors $\gamma(G) = 3$

Si G est complet d'ordre n alors $\gamma(G) = n$



- Le nombre chromatique d'un graphe est supérieur ou égal à l'ordre de tous ses sous-graphes complets

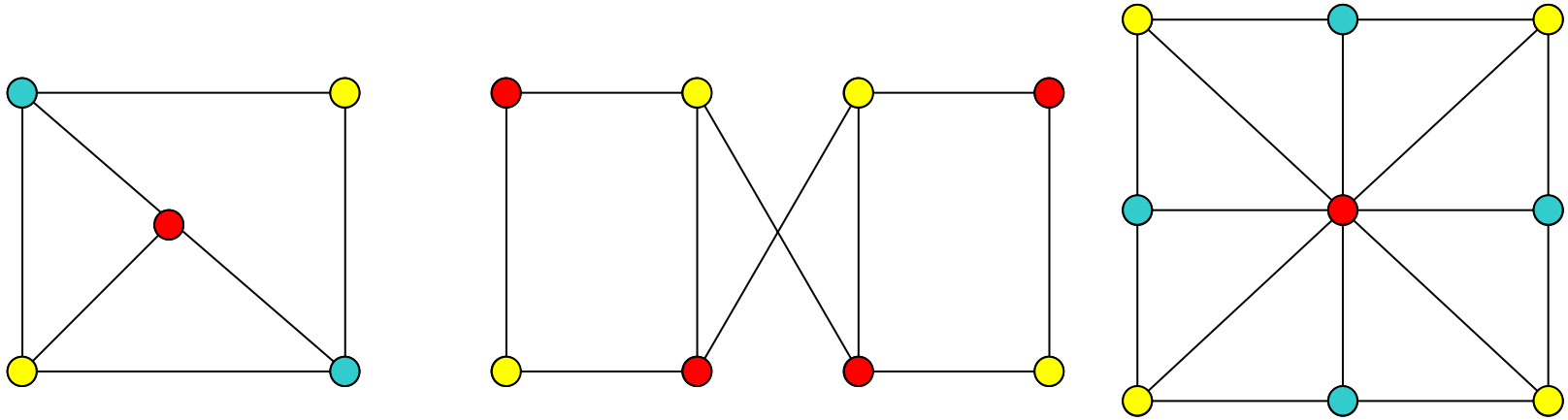
Soit G le graphe ci-dessous



Déterminer tous les sous-graphes complets d'ordre 4

Vérifier que 4 couleurs suffisent pour colorier ce graphe

- Déterminer le nombre chromatique des graphes suivants :



- Théorème :
  Soit G = (X , A) un graphe simple d'ordre n. alors $\gamma(G) \leq k + 1$
  où k est le degré maximal des sommets du graphe G.

- **Algorithme de coloration de Welsh et Powell**
  Cet algorithme couramment utilisé permet d'obtenir une assez bonne coloration d'un graphe, c'est-à-dire une coloration n'utilisant pas un trop grand nombre de couleurs. Cependant il n'assure pas que le nombre de couleurs utilisé soit minimum (et donc égal au nombre chromatique du graphe).
- **Etape 1**
  Classer les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré, et attribuer à chacun des sommets son numéro d'ordre dans la liste obtenue.

- **Etape 2**
  En parcourant la liste dans l'ordre, attribuer une couleur non encore utilisée au premier sommet non encore coloré, et attribuer cette même couleur à chaque sommet non encore coloré et non adjacent à un sommet de cette couleur.

- **Etape 3**
  S'il reste des sommets non colorés dans le graphe, revenir à l'étape 2. Sinon, la coloration est terminée.

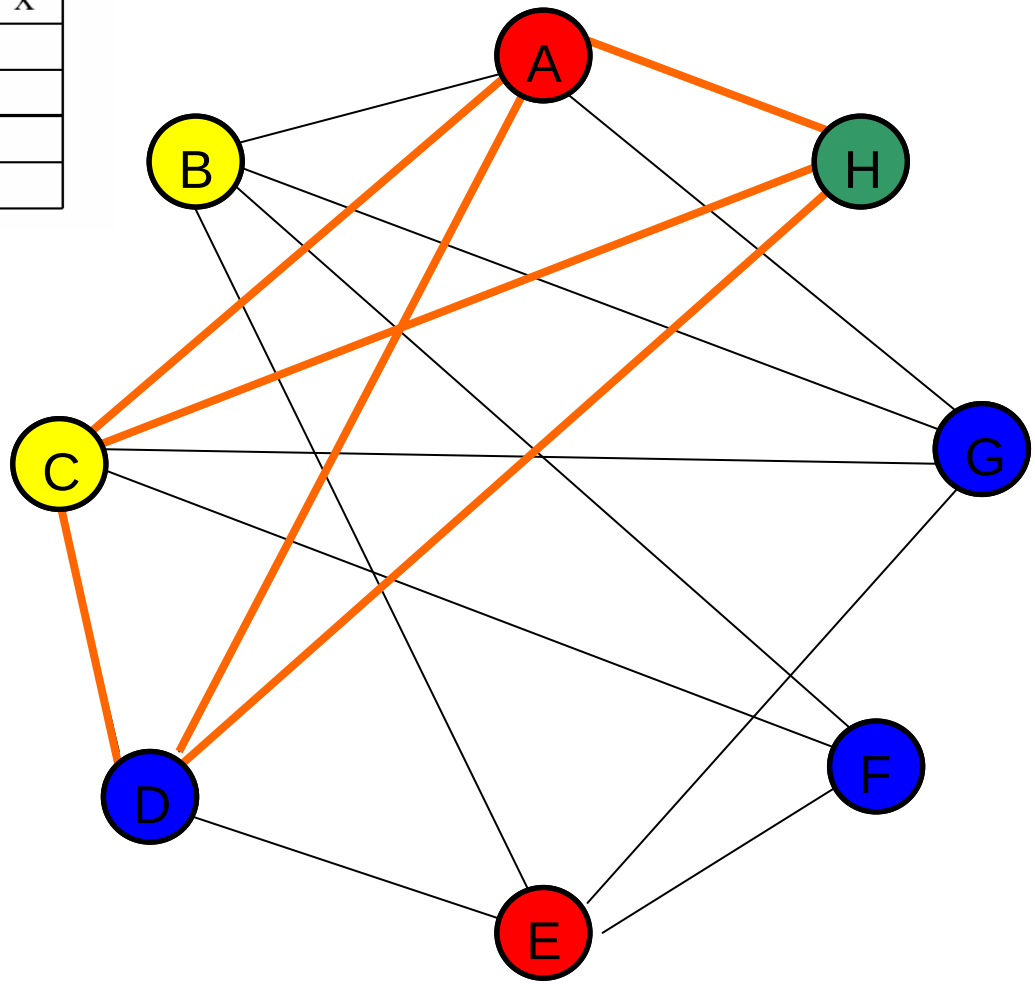
Un problème d’aquariophilie

A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit poissons ; dans le tableau ci-dessous, une croix signifie que les poissons ne peuvent cohabiter dans un même aquarium :

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		x	x	x			x	x
B	x				x	x	x	
C	x			x		x	x	x
D	x		x		x			x
E		x		x		x	x	
F		x	x		x			
G	x	x	x		x			
H	x		x	x				

Quel nombre minimum d’aquariums faut-il ?

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		x	x	x			x	x
B	x				x	x	x	
C	x			x		x	x	x
D	x		x		x			x
E		x		x		x	x	
F		x	x		x			
G	x	x	x		x			
H	x		x	x				



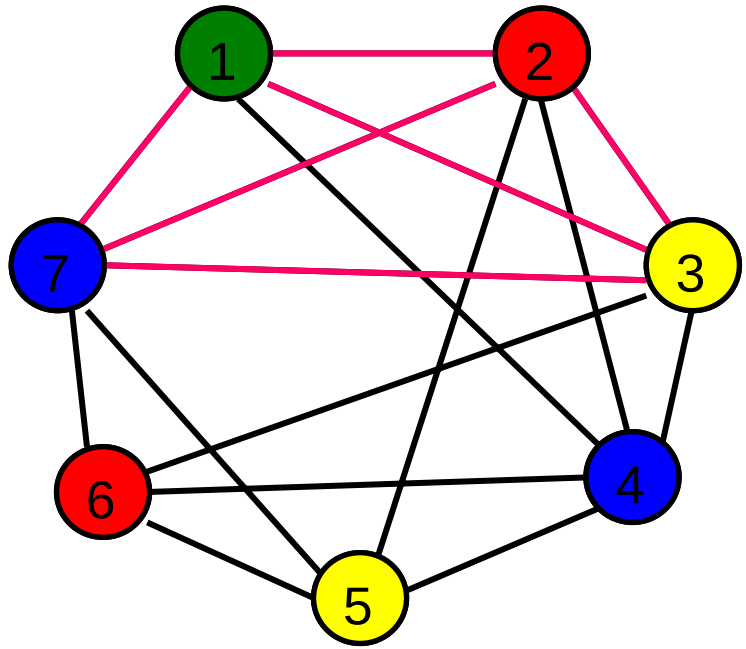
Problème d’emploi du temps

Une université doit organiser les horaires des examens. On suppose qu’il y a 7 épreuves à planifier, correspondant aux cours numérotés de 1 à 7 et que les paires de cours suivantes ont des étudiants communs : 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 7, 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 7, 3 et 4, 3 et 6, 3 et 7, 4 et 5, 4 et 6, 5 et 6, 5 et 7 et 6 et 7.

Comment organiser ces épreuves de façon qu’aucun étudiant n’ait à passer deux épreuves en même temps et cela sur une durée minimale ?

Problème d’emploi du temps

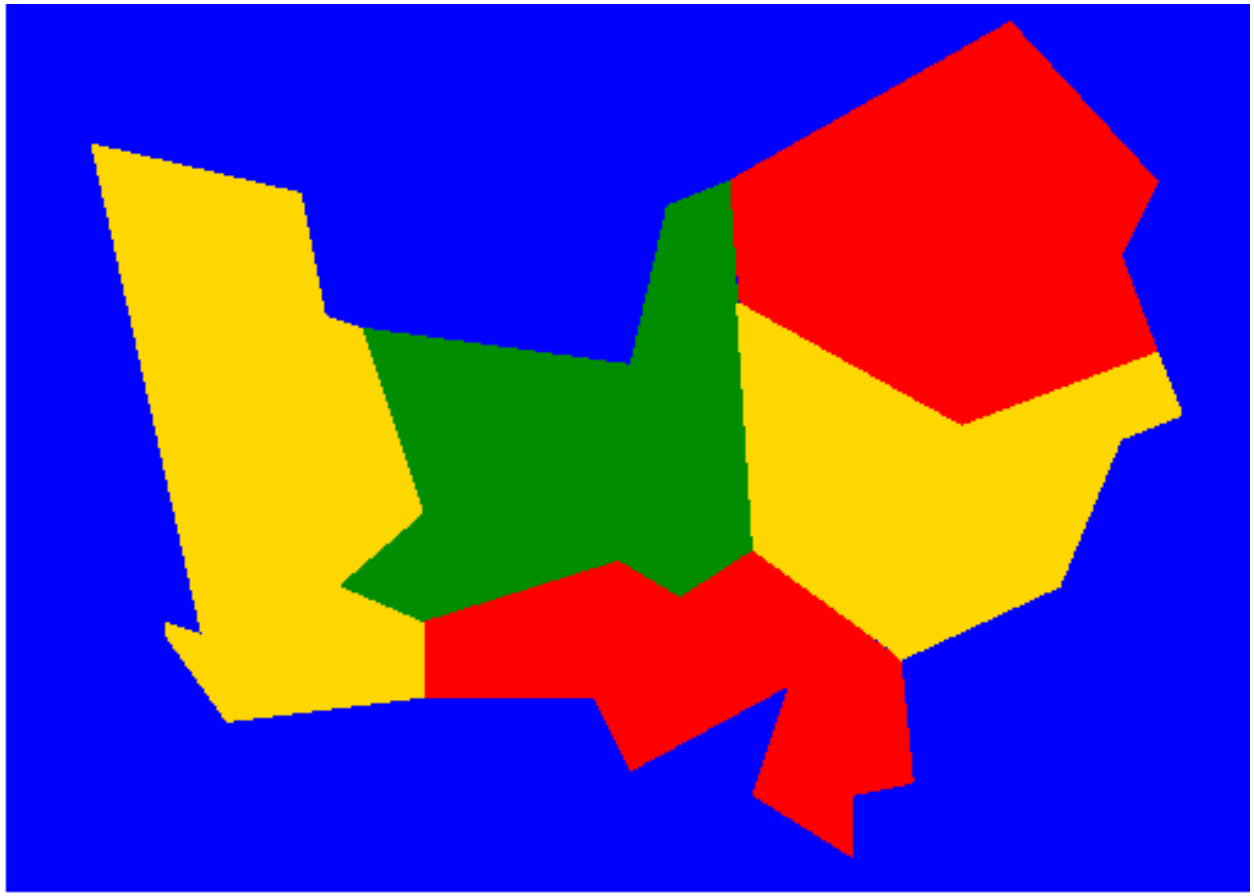
Une université doit organiser les horaires des examens. On suppose qu’il y a 7 épreuves à planifier, correspondant aux cours numérotés de 1 à 7 et que les paires de cours suivantes ont des étudiants communs : 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 7, 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 7, 3 et 4, 3 et 6, 3 et 7, 4 et 5, 4 et 6, 5 et 6, 5 et 7 et 6 et 7.



Comment organiser ces épreuves de façon qu’aucun étudiant n’ait à passer deux épreuves en même temps et cela sur une durée minimale ?

Théorème des 4 couleurs (Appel, Haken 1976)

Quatre couleurs suffisent pour colorier n'importe quelle carte géographique de façon à ce que deux pays voisins ne soient pas coloriés par la même couleur.



Bacha