Les graphes : Théorie et Applications

Sèmya Elaoud

Assistante en Méthodes Quantitatives
à l'Institut Supérieur d'Informatique et de Multimédia de Sfax

samya.elaoud@fsegs.rnu.tn

Motivations

- Pour les lycéens, le champ mathématique se limite au calcul, à l'étude des fonctions et à la géométrie élémentaire !!
- S'ouvrir sur la théorie des graphes, c'est s'ouvrir à de nouveaux raisonnements, c'est s'entraîner à avoir un autre regard mathématique pour le résolution des problèmes.
- Montrer aux élèves des mathématiques non classiques liées à des problèmes concrets .
- Ce choix peut aider un certain nombre d'élèves à (re)trouver goût aux mathématiques : la nouveauté des objets mathématiques manipulés devrait susciter leur adhésion, et leur caractère relativement élémentaire pour éviter tout découragement au long de l'année.

Motivations

- La théorie des graphes ouvre un grand champ de modélisation conduisant à des solutions efficaces

  ⇨ Montrer comment l'utilisation judicieuse d'un graphe peut rendre certains problèmes concrets accessibles à un raisonnement mathématique.

  Un bon dessin vaut mieux qu'un bon discours !

- Apprendre à représenter une situation à l'aide d'un graphe en se posant d'abord les questions suivantes : "quels objets vont tenir le rôle de sommets, lesquels deviennent les arêtes ?".

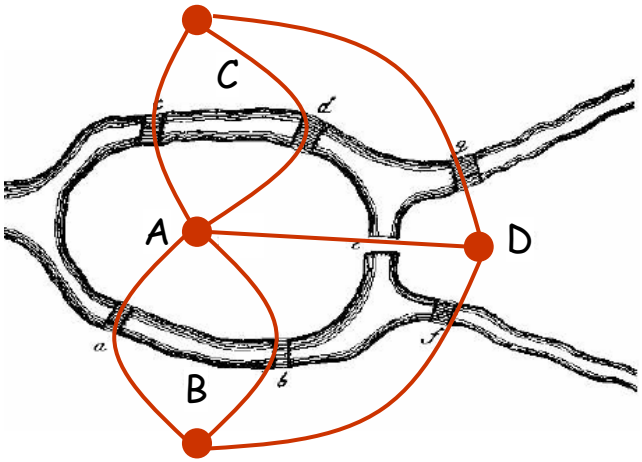
Contenu

- la modélisation d'une situation par un graphe orienté ou non, éventuellement étiqueté ou pondéré et dont la solution est associée à:
  - la recherche de l'existence d'une chaîne ou d'un cycle eulérien
  - la recherche d'une plus courte chaîne dans un graphe
  - la coloration d'un graphe
  - la recherche du nombre chromatique
- À travers la maîtrise de quelques notions:
  - L'ordre d'un graphe, le degré d'un sommet,
  - Graphe simple, graphe complet , graphe connexe,
  - Chaîne, la longueur d'une chaîne, cycle
  - Théorème d'Euler, chaîne eulérienne, cycle eulérien.

Aperçu historique

- Le célèbre problème des ponts de Königsberg (Euler, 1736):

  Partir d'une terre quelconque A, B, C, ou D et traverser chacun des ponts une fois et une seule et revenir à son point de départ.

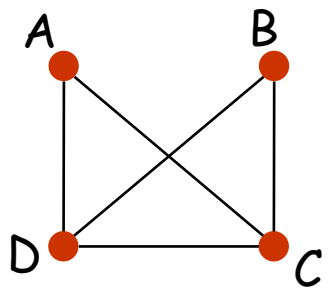


La rivière Pregel et l'île de Kneiphof

Utilité et applications

- Comment tracer 5 segments sur une feuille, de telle manière que chaque segment en coupe exactement 3 autres ?
- On dispose d'un fil de fer de 120 cm. Est-il possible de préparer une carcasse de cube de 10 cm d'arête sans couper le fil ?
- Montrer que le nombre de personnes ayant vécu ou vivant sur terre qui ont donné un nombre impair de poignées de main est pair.
- On souhaite prélever 4 litres de liquide dans un tonneau. Pour cela, nous avons à notre disposition deux récipients (non gradués !), l'un de 5 litres, l'autre de 3 litres... Comment doit-on procéder ?
- Montrez que dans un groupe de personnes, il y a toujours deux personnes ayant le même nombre d'amis présents.
- Montrez que dans un groupe de 9 personnes, 4 se connaissent mutuellement ou 3 ne se connaissent pas.

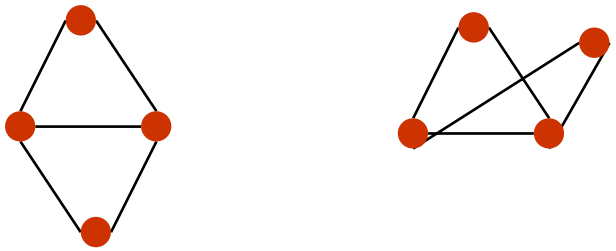
Définitions et terminologies



- Le schéma ci-contre représente un graphe.
- Les points rouges notés A, B, C et D sont <u>les sommets</u> de ce graphe.
- Les lignes, lorsqu'il y en a, reliant deux sommets sont appelées des <u>arêtes.</u>
- <u>L'ordre</u> d'un graphe est égal au nombre de ses sommets. L'ordre du graphe G est égal à 4.
- On dit que deux <u>sommets</u> sont <u>adjacents</u> s'ils sont reliés par une arête.
- Deux <u>arêtes</u> sont <u>adjacents</u> si au moins une de leurs extrémités est commune.

Définitions et terminologies

- Un graphe est <u>complet</u> si chaque sommet est adjacent à tous les autres. , c'est a dire si toutes les arêtes possibles existent (sauf les boucles).
- Un sommet est <u>isolé</u> s'il n'est adjacent à aucun autre sommet.
- Un graphe est <u>nul</u> s'il n'a aucune arête, c'est ensemble de sommets isolés.
- Une arête joignant un sommet à lui-même, est appelée <u>boucle</u>.
- Graphes identiques:



Propriétés

- le nombre d'arêtes est égal à la somme des degrés des sommets divisée par deux

$$|A| = \frac{\sum_{x \in X} d_G(x)}{2}$$

  - lorsque on additionne les degrés des sommets, une arête est comptée deux fois, une fois pour chaque extrémité.

- la somme des degrés des sommets est paire.

- Le nombre de sommets de degré impair d'un graphe non orienté est donc toujours pair.

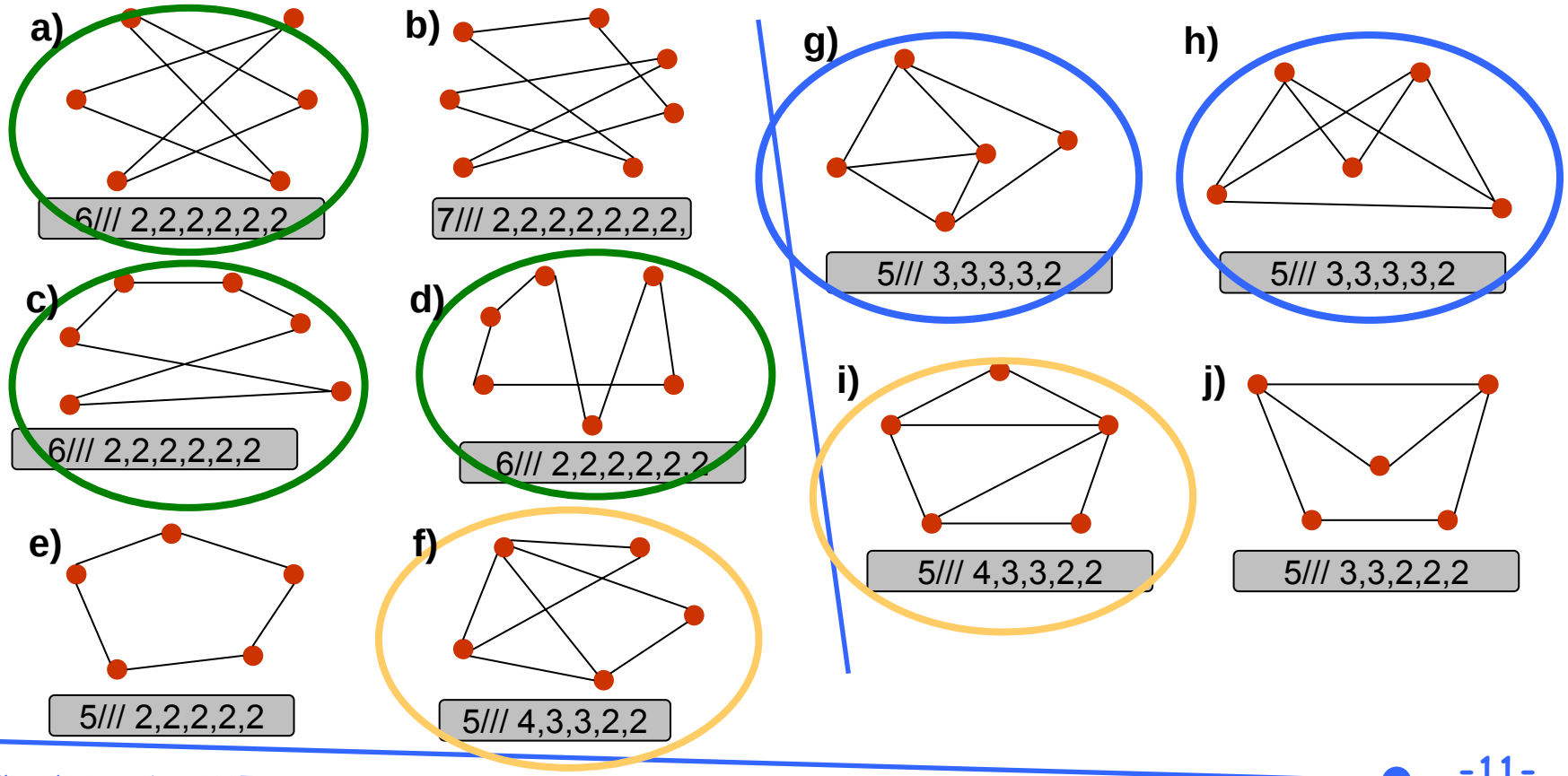
  - Sinon, la somme des degrés des sommets serait impaire.

3ème année Économie et Gestion

Associer un graphe à une situation

Exercice 1

- Déterminer ceux qui sont successible de décrire une même situation



Associer un graphe à une situation

Exercice 2

- Peut-on construire un graphe ayant au moins deux sommets et tel que tous les sommets ont des degrés différents?

Supposons qu'un tel graphe existe et qu'il possède n sommets. Le degré maximal d'un sommet est donc n-1.

Si tous les degrés des sommets sont distincts, on a donc nécessairement un sommet de degré 0, un sommet de degré 1, …, un sommet de degré n-1.

Du fait de la présence d'un sommet de degré 0, disons x_0, il est impossible d'avoir un sommet de degré n-1 ! (en effet, celui-ci devrait être relié à tous les autres, y compris x_0). Contradiction..!!

Définitions et terminologies

Chaînes et cycles

- Une <u>chaîne</u> dans un graphe G est une suite finie; s_0, a_1, s_1, a_2, a_3, s_3, …, a_n, s_n débutant et finissant par un sommet, alternant sommets et arêtes de telle manière que chaque arête soit encadrée par ses sommets. Par convention on impose à toute chaîne de contenir au moins une arête.

  ⇨ Par convention on impose à toute chaîne de contenir au moins une arête.

- La <u>longueur</u> d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la décomposent.

- Une chaîne est dite <u>fermée</u> si son origine et son extrémité sont confondus.

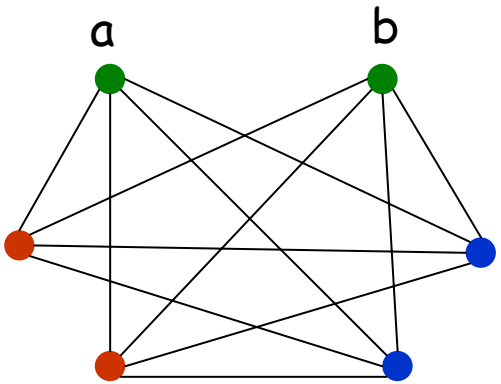
- Un <u>cycle</u> est une chaîne fermée.

Associer un graphe à une situation

Exercice 3

- Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions; chaque espion doit espionner tous les espions des autre pays.

1) Représentez cette situation par un graphe d'ordre 6 dans lequel chaque arête reliant i et j signifie que i espionne j, et j espionne i.

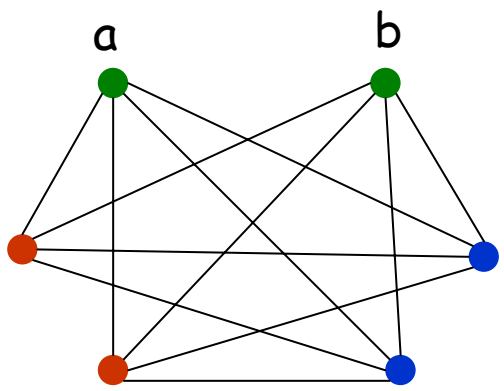


Associer un graphe à une situation

Exercice 3

- Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions; chaque espion doit espionner tous les espions des autre pays.

2) Ce graphe est-il complet? Est-il connexe?



Def. Un graphe simple est dit complet si tous ses sommets sont adjacents.

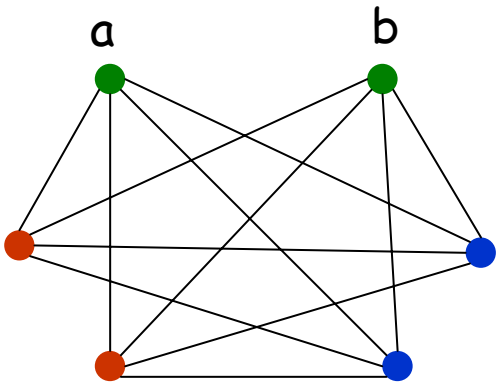
Ce graphe n'est pas complet car deux sommets correspondant à deux espions d'un même pays ne sont pas adjacents.

Associer un graphe à une situation

Exercice 3

- Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions; chaque espion doit espionner tous les espions des autre pays.

2) Ce graphe est-il complet? Est-il connexe?



Def. Un graphe est dit connexe si deux quelconques de ses sommets sont reliés par une chaîne.

a est connecté à tous les sommets sauf b.
b est connecté à tous les sommets sauf a.
Il y a une chaîne de a vers b passant par l'un quelconque des autres sommets du graphe.
Le graphe est connexe.

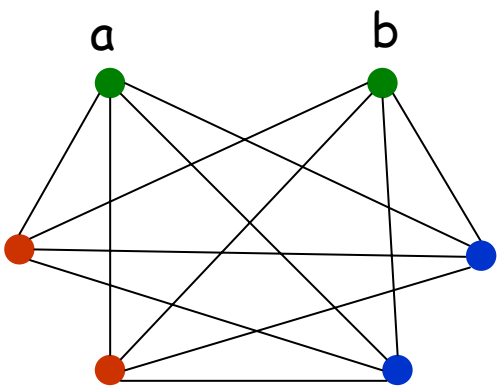
Associer un graphe à une situation

Exercice 3

- Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions; chaque espion doit espionner tous les espions des autre pays.

3) a/ Quelle est le degrés de chaque sommet?

b/ En déduire le nombre d'arêtes du graphe.



Chaque espion espionne exactement 4 autres; 2 de chaque pays.
Chaque sommet est adjacent à exactement 4 autres sommets.
Tous les sommets sont de degré 4.

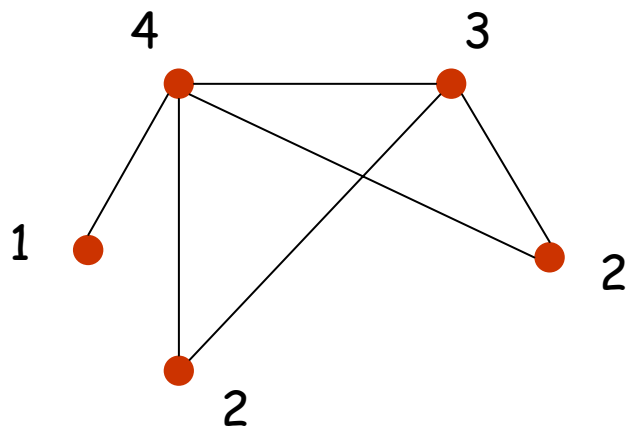
Def. le nombre d'arêtes est égal à la somme des degrés des sommets divisée par deux

$|A| = \frac{1}{2}(4 \times 6) = 12$

Associer un graphe à une situation

Exercice 4

- 1) Existe-t-il un graphe d'ordre 5 dont les sommets ont pour degrés respectifs 1, 2, 2, 3, 4 ?

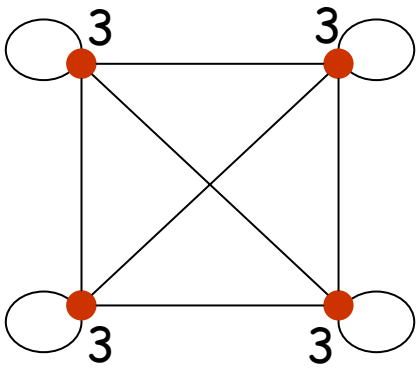


Associer un graphe à une situation

Exercice 4

- 2) a/ Existe-t-il un graphe d'ordre 4 dont tous les sommets ont un degré égal à 3 ?

  b/ Existe-t-il un graphe d'ordre 5 dont tous les sommets ont un degré égal à 3 ?



Théorème: La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes de ce graphe; c'est donc un nombre pair.

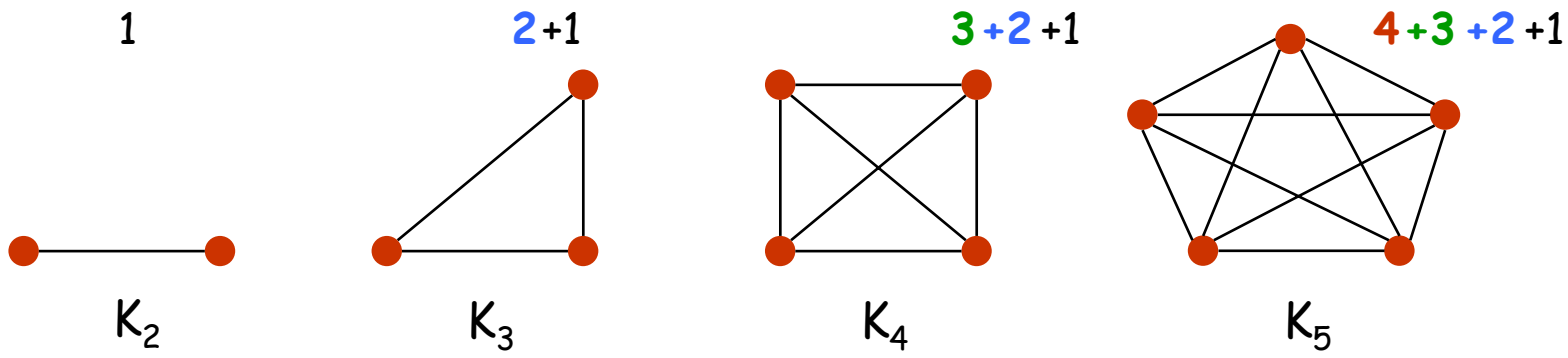
$\Rightarrow$ $\sum$ degrés = 5x3=15 impair !!!
Un tel graphe n'existe pas.

Associer un graphe à une situation

Exercice 5

- Dessiner les graphes complets G d'ordre n , pour n = 2, 3, 4, 5. Combien ont-ils d'arêtes?

Def: Un graphe simple est dit complet si tous ses sommets sont adjacents, c'est a dire si toutes les arêtes possibles existent.



Dans un graphe complet Kn, le nombre d'arêtes est égal à $\frac{n(n-1)}{2}$

Associer un graphe à une situation

Exercice 5

- Montrons que dans un graphe complet d'ordre n, n≥2, le nombre d'arêtes A_n est égal à $\frac{n(n-1)}{2}$

Pour n=2, A_2=2x1/2=1. vérifié

Soit Kn, n≥2, un graphe complet tel que: $N_n=\frac{n(n-1)}{2}$

Montrons que le graphe complet Kn+1 admet un nombre d'arête égal à:

$$N_{n+1}=\frac{n(n+1)}{2}$$

Le graphe Kn+1 se compose du graphe Kn plus un sommet supplémentaire S avec toutes les arêtes reliant S à tous les autres n sommets. Il y a exactement n arêtes de plus.

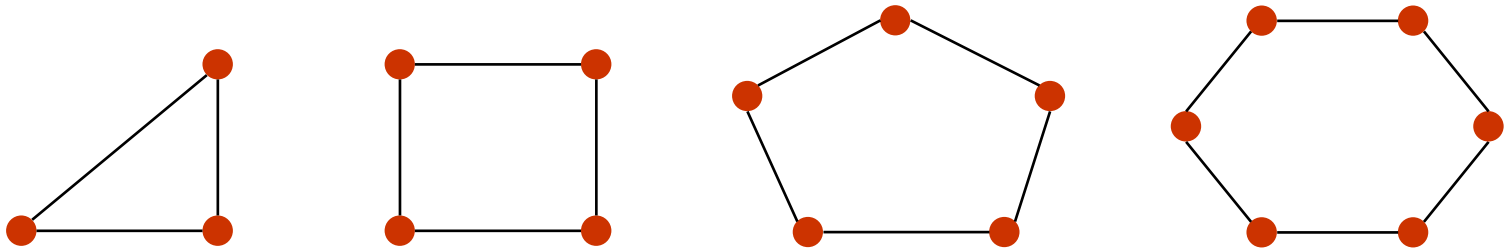
$$N_{n+1}=N_n+n=\frac{n(n-1)}{2}+2=\frac{n^2-n+2n}{2}=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \forall n\geq 2,\ N_n=\frac{n(n-1)}{2}$$

Associer un graphe à une situation

Exercice 6

- Dessiner les graphes d'ordre 3, 4, 5, 6 dont tous les sommets sont de degré 2.



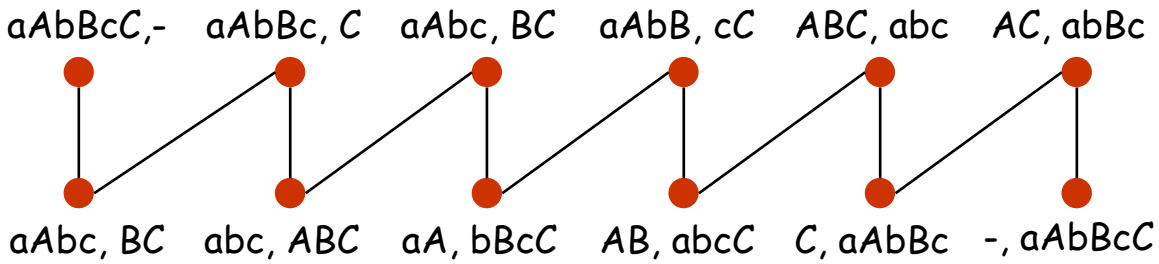
n = 3 n = 4 n = 5 n = 6

Associer un graphe à une situation

Exercice 7

- Trois maris jaloux et leurs épouses souhaitent traverser une rivière. Ils disposent d'une barque qui ne peut transporter plus de deux personnes à la fois. Comment doivent-ils procéder, sachant qu'aucune femme ne doit rester en compagnie d'un ou deux hommes sans que son mari soit présent ?

Notant A, B et C les femmes, a, b et c les maris. On obtient un graphe biparti, selon que la barque est sur une rive ou sur l'autre. Le schéma suivant propose une solution parmi d'autres (le graphe n'est pas représenté en totalité)…



Associer un graphe à une situation

Exercice 7

- Montrez que ce problème n'a pas de solution si les couples sont au nombre de 4.

Dans le cas où 4 couples sont sur la berge, les sommets (aAbBcCdD,-) et (-,aAbBcCdD) sont dans des composantes connexes distinctes. Il n'existe donc pas de chemin de l'un à l'autre et le problème n'a pas de solution (on peut vérifier que dans la composante connexe du sommet d'arrivée, seuls figurent des sommets correspondant à un seul mari sur la rive initiale)…

À titre d'exercice supplémentaire, on peut voir que le problème des 4 maris jaloux a une solution s'il existe une île au milieu de la rivière permettant de déposer certaines personnes ou si la barque peut transporter trois personnes.

Associer un graphe à une situation

Exercice 8

- Dans un groupe de vingt enfants, est-il possible que sept d'entre eux aient chacun exactement trois amis, neuf d'entre eux en aient exactement quatre, et quatre d'entre eux exactement cinq ?

Chaque sommet est représente par un enfant.
Deux sommets sont adjacents si les deux enfants correspondants sont amis.
Le nombre d'amis d'un enfant est le degré du sommets correspondant.

7 sommets de degré 3, 9 sommets de degré 4 et 4 sommets de degré 5.

$$\sum \text{degrés} = 7\times3 + 9\times4 + 4\times5 = 77 \quad \text{impair !!!}$$

$\Longrightarrow$ Un tel graphe n'existe pas.

Associer un graphe à une situation

Exercice 9

- Le conseil municipal d'une ville comprend 7 commissions, qui obéissent aux règles suivantes:
  Règle 1 : tout conseiller municipal fait partie de 2 commissions exactement.
  Règle 2 : deux commissions quelconques ont exactement un conseiller en commun;
  Combien y a-t-il de membres dans le conseil municipal ?

les commissions sont les sommets et un conseiller faisant partie d'exactement 2 commissions est représenté par une arête reliant les 2 sommets qui les représentent

La règle 2 implique qu'il n'y a pas d'arête multiple, et que deux sommets quelconques sont adjacents; càd que le graphe est complet, c'est K_7, il a C_6^2 arêtes, soit 21 conseillers municipaux. On peut même en déduire que chaque commission a exactement 6 membres.

Coloriage d'un graphe

Nombre chromatique

- Le <u>nombre chromatique</u> est le plus petit nombre de couleurs permettant de colorier tous les sommets du graphe sans que deux sommets adjacents soient de la même couleur.
- Le nombre chromatique du graphe complet Kn est n.
- Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal au plus grand degré de ses sommets k majoré par 1: $\gamma(G) \leq k+1$

Preuve: Soit un graphe et k le degré maximum de ses sommets. Donnons-nous une palette de (k + 1) couleurs. Pour chaque sommet du graphe on peut tenir le raisonnement suivant: ce sommet est adjacent à k sommets au plus, et le nombre de couleurs déjà utilisées pour colorer ces sommets est donc inférieur ou égal à k. Il reste donc au moins une couleur non utilisée dans la palette, avec laquelle nous pouvons colorer notre sommet.

Coloriage d'un graphe

Nombre chromatique

- Le <u>nombre chromatique</u> est le plus petit nombre de couleurs permettant de colorier tous les sommets du graphe sans que deux sommets adjacents soient de la même couleur.
- Le nombre chromatique du graphe complet Kn est n.
- Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal au plus grand degré de ses sommets k majoré par 1: $\gamma(G) \leq k+1$
- Le nombre chromatique d'un graphe est supérieur ou égal à l'ordre de tous ses sous graphes complets.

Preuve: Puisque, par définition, dans une clique d'ordre m, tous les sommets sont adjacents entre eux, il faudra m couleurs. Donc, forcément, le nombre chromatique du graphe sera supérieur ou égal à l'ordre de sa plus grande clique.

Coloriage d'un graphe

Nombre chromatique

- Le <u>nombre chromatique</u> est le plus petit nombre de couleurs permettant de colorier tous les sommets du graphe sans que deux sommets adjacents soient de la même couleur.
- Le nombre chromatique du graphe complet Kn est n.
- Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal au plus grand degré de ses sommets k majoré par 1: $\gamma(G) \leq k+1$
- Le nombre chromatique d'un graphe est supérieur ou égal à l'ordre de tous ses sous graphes complets.
- Soit Cn le cycle de longueur n. Si n est pair on a : (Cn) = 2, et si n est impair on a : (Cn) = 3. Le nombre chromatique d'un cycle élémentaire est 2 si son nombre de sommets est pair, il est de 3 sinon.

Coloriage d'un graphe

Alg. de coloriage

- Algorithme de coloration de Welsh et Powell (ou alg de glouton)

1) Classer les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré, et attribuer à chacun des sommets son numéro d'ordre dans la liste obtenue.

Tant qu'il reste des sommets à colorier, on exécute les deux actions 2 et 3 :

2) Chercher dans la liste ordonnée des sommets le premier sommet non encore colorié et le colorier d'une nouvelle couleur.

3) Colorier avec cette même couleur, et en respectant leur ordre dans la liste, tous les sommets non encore coloriés qui ne sont pas adjacents au sommet précédent et ni adjacents entre eux.

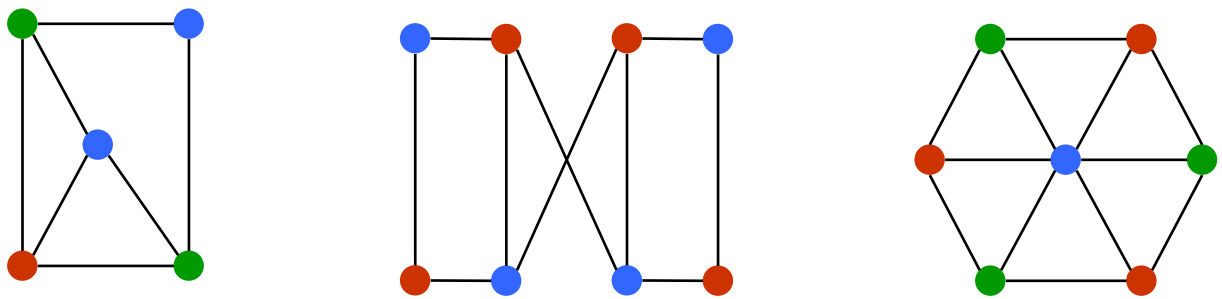
Exemple

Coloriage d'un graphe

Exercice 10

- Déterminer le nombre chromatique des graphes suivants:

Tout graphe contenant un triangle (K_3) ne peut être colorié en moins de trois couleurs.



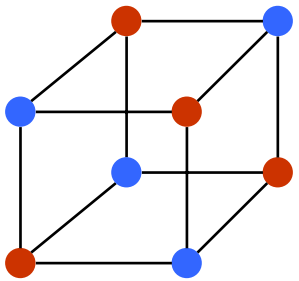
Ces graphes ont respectivement pour nombre chromatique 3, 2 et 3

Associer un graphe à une situation

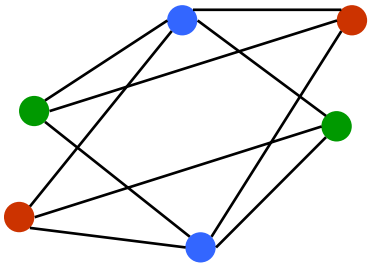
Exercice 11

- Déterminer le nombre chromatique des graphes suivants:

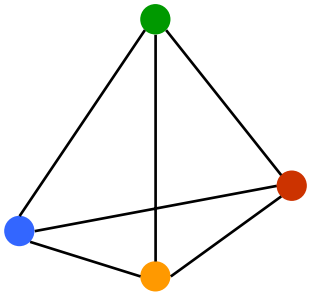
(G) = 2



(G) = 3



(G) = 4



Associer un graphe à une situation

Exercice 12

- Une école doit faire passer des tests écrits à quatre élèves : Ali, Fatma, Mohamed et Sarra. Sept disciplines sont concernées : les mathématiques, la physique, la biologie, le français, l'anglais, l'espagnol et l'histoire.

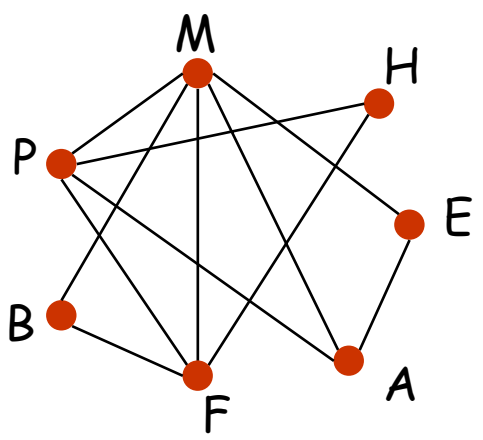
  Ali doit passer les mathématiques, la physique et l'anglais, Fatma les mathématiques, la biologie et le français, Mohamed les mathématiques, l'anglais et l'espagnol et Matthieu la physique, le français et l'histoire.

  Quel est le nombre minimal de plages horaires à prévoir pour qu'aucun élève n'ait à passer deux tests simultanément ?

Associer un graphe à une situation

Exercice 12

On peut modéliser la situation par un graphe tels que les sommets représentent les disciplines, les arêtes relient les disciplines dont les tests ne peuvent avoir lieu simultanément.



Les plages horaires sont représentées par des couleurs. On attribue à chaque sommet une couleur, deux sommets adjacents ne pouvant avoir la même. Le sous-graphe complet M, A, E (K_3) nécessite 3 couleurs.
Le dessin prouve que 3 sont suffisantes pour le graphe. Ainsi le nombre chromatique du graphe est 3.

Si Ali doit aussi passer le test d'histoire, le nombre chromatique devient supérieur ou égal à 4. Un dessin prouve qu'il est de 4.

Connexité

Exercice 13

- On considère le graphe simple dont les sommets sont les entiers naturels compris au sens large entre 1 et 20, et tel que deux sommets i et j sont relies si et seulement si $i + j \leq 21$.
  1) Prouver que ce graphe est connexe. Déterminer son diamètre.

Un graphe est dit connexe si on peut relier deux quelconques de ses sommets par une chaîne.

Le diamètre d'un graphe connexe est la plus grande distance entre deux sommets quelconques.

Le sommet 1 est adjacent à tous les sommets des entiers n inférieurs ou égaux à 20 (si $n \leq 20$ alors $n+1 \leq 21$). Ceci prouve que le graphe est connexe, et que son diamètre est au plus 2 (on peut toujours trouver une chaîne de longueur au plus 2 de i à j en passant par 1). Comme 19 et 20 ne sont pas adjacents, le diamètre est exactement =2.

Connexité

Exercice 13

2) Déterminer le nombre chromatique de ce graphe.

le degré du sommet i est 21-i si i > 10, et 20-i si i≤10 (la différence vient du fait que, si i > 10, i est relie à tous les entiers de 1 à 21-i, tandis que, si i ≤ 10, i est relie à tous les entiers de 1 a 21-i, sauf i car on ne compte pas la boucle de i à i).

On peut appliquer l'algorithme de Welch et Powell aux entiers rangés dans l'ordre des degrés décroissants, qui est l'ordre naturel, et on trouve que l'on peut colorer le graphe avec 11 couleurs, correspondants aux ensembles stables {1}, {2; 20}, {3; 19}, {4; 18}, {5; 17}, {6; 16}, {7; 15}, {8; 14}, {9; 13}, {10; 12}, {11}. Donc le nombre chromatique est au plus de 11.

D'autre part, si i; j sont deux entiers distincts inférieurs ou égaux à 11, on a i + j ≤ 21, donc i et j sont adjacents. Le graphe contient donc un graphe complet d'ordre 11 : son nombre chromatique est au moins 11.

Le nombre chromatique est égal à 11

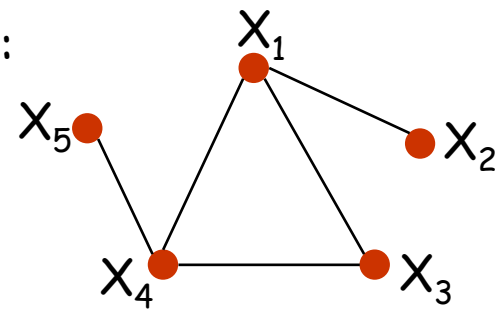
Associer un graphe à une situation

Exercice 14

On considère le système d'inéquation suivant:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 1 \\ X_1 + X_3 + X_4 \leq 1 \\ X_4 + X_5 \leq 1 \end{cases}$$

$Z = 3$



Où les inconnues ne prennent que la valeur 0 ou la valeur 1. Déterminer une solution de ce système qui maximise la fonction:

$$Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$$

On peut modéliser la situation par un graphe tel que chaque sommet représente une variable. Deux sommets sont adjacents si les deux font partie d'une même inéquation.

Pour maximiser Z, il s'agit de trouver le plus grand sous-ensemble de l'ensemble des sommets ne contenant pas de paire de sommets adjacents.

Associer un graphe à une situation

Exercice 15

Sept élèves, désignés par A, B, C, D, E, F et G se sont rendus à la bibliothèque le même jour. Le tableau suivant précise «qui à rencontré qui » (la bibliothèque étant petite, deux élèves présents au même moment se rencontrent nécessairement…).

Élève	A	B	C	D	E	F	G
a rencontré	D, E	D, E, F, G	E, G	A, B, E	A, B, C, D, F, G	B, E, G	B, C, E, F

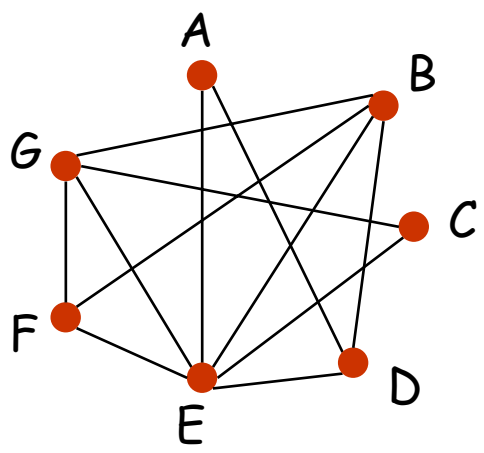
De combien de places assises doit disposer la bibliothèque pour que chacun ait pu travailler correctement au cours de cette journée ?

On peut modéliser la situation par un graphe tel que chaque sommet représente un élève. Deux sommets sont adjacents si les deux élèves correspondants se sont rencontrés à la bibliothèque.

Associer un graphe à une situation

Exercice 15

Élève	A	B	C	D	E	F	G
a rencontré	D, E	D, E, F, G	E, G	A, B, E	A, B, C, D, F, G	B, E, G	B, C, E, F



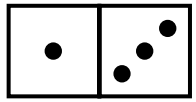
- Problème de coloriage d'un graphe: Chaque couleur représente une chaise. Nombre de chaises = nombre Chromatique du graphe.

- Le graphe contient un K_4 et peut être colorié en 4 couleurs, on doit donc disposer de 4 places assises.

Associer un graphe à une situation

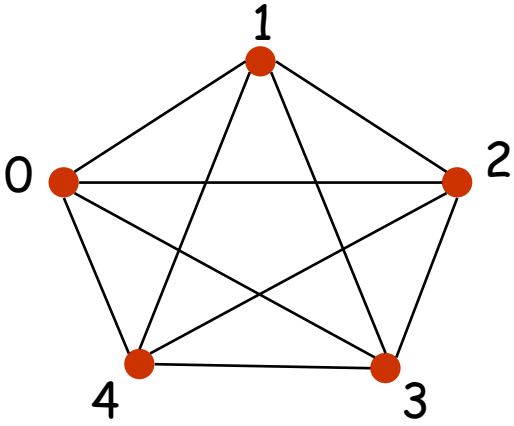
Exercice 16

On considère un jeu de dominos utilisant les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, tel que, sur chaque domino, figurent deux chiffres distincts par exemple le 1 et le 3.



On se propose de résoudre le problème suivant (P): Est-il possible d'aligner tous les dominos de sorte que, lorsque deux pions «se touchent», les chiffres «en contact» soient identiques?

1) Représentez cette situation à l'aider d'un graphe G dans lequel chaque arrête est un domino et les deux extrémités sont les chiffres figurant sur ce domino.



Le graphe est d'ordre 5 car il y a 5 chiffres différents. Le graphe est complet car il existe un domino pour toute pair de chiffres différents.

Associer un graphe à une situation

Exercice 16

2) Expliquer pourquoi le problème (P) est équivalent au problème suivant:

«Le graphe G admet-il une chaîne eulérienne? »

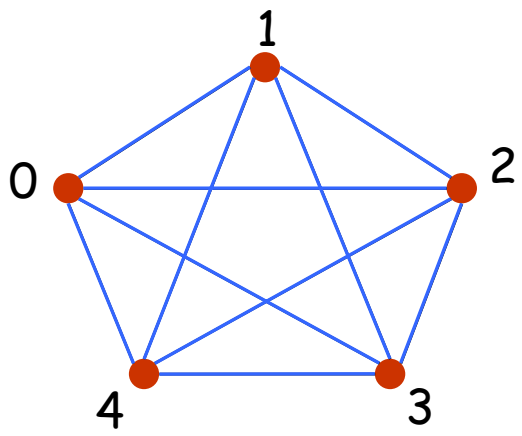
- Aligner tous les dominos revient à trouver une successions de pions telle que deux dominos ne se touchent que si les chiffres en contact sont identiques.

- Un domino est représenté par une arête donc aligner tous les dominos revient à trouver une succession de <u>toutes</u> les arêtes telle que chacune figure une et une seule fois (un domino ne peut être aligné qu'une seule fois) et que deux arêtes consécutives ont nécessairement une extrémité en commun. Il s'agit donc par définition de chercher une chaîne eulérienne.

Associer un graphe à une situation

Exercice 16

3) Résolvez le problème (P).



↳ Tous les sommets du graphe sont de degré pair donc il admet une chaîne eulérienne.
Il est donc possible d'aligner tous les dominos de sorte que, lorsque deux pions se touchent, les chiffres en contact soient identiques.

Une solution possible est la suivante :

0 | 1	1 | 2	2 | 3	3 | 4	4 | 0	0 | 2	2 | 4	4 | 1	1 | 3	3 | 0

4) Quelle serait la réponse au problème (P) dans chacun des cas suivants?

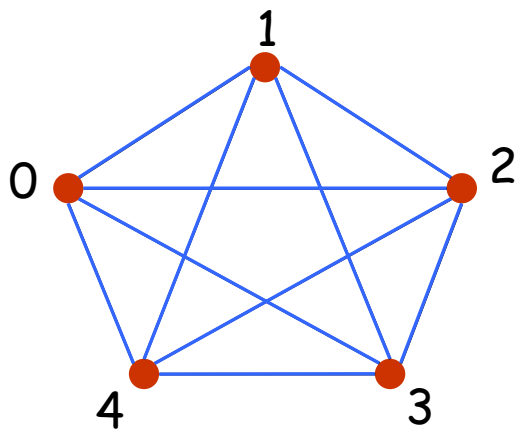
a) Les dominos ne contiennent que les chiffres 0, 1, 2, 3.

↳ Un graphe complet d'ordre 4 admet 4 sommets de degré 3 donc n'admet pas de chaîne eulérienne. Il n'est pas possible d'aligner les dominos.

Associer un graphe à une situation

Exercice 16

3) Résolvez le problème (P).



Tous les sommets du graphe sont de degré pair donc il admet une chaîne eulérienne.
Il est donc possible d'aligner tous les dominos de sorte que, lorsque deux pions se touchent, les chiffres en contact soient identiques.

Une solution possible est la suivante :

0 | 1	1 | 2	2 | 3	3 | 4	4 | 0	0 | 2	2 | 4	4 | 1	1 | 3	3 | 0

4) Quelle serait la réponse au problème (P) dans chacun des cas suivants?

a) Les dominos ne contiennent que les chiffres 0, 1, 2, 3.

b) Les dominos ne contiennent que les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

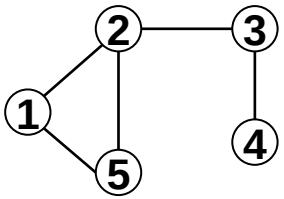
Aucun sommet de degré impair. On peut aligner les dominos.

Associer un graphe à une situation

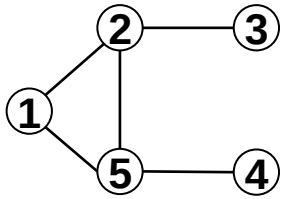
Exercice 17

- Pour les graphes suivants dites s'ils admettent au moins une chaîne eulérienne et dans l'affirmatique indiquez en une.

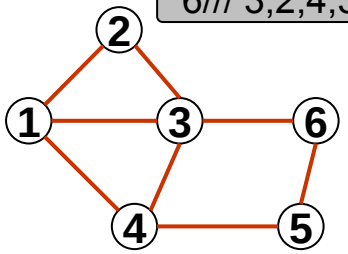
5/// 2,3,2,1,2



5/// 2,3,1,1,3

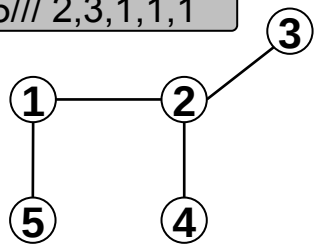


6/// 3,2,4,3,2,2

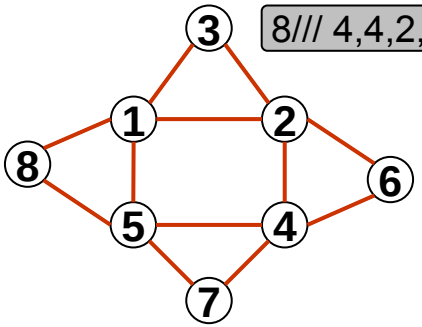


1-2-3-1-4-3-6-5-4

5/// 2,3,1,1,1

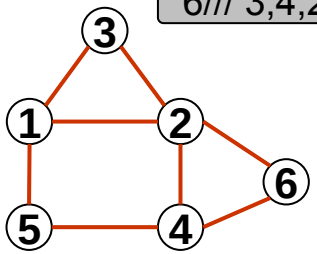


8/// 4,4,2,4,4,4,2,2



1-8-5-7-4-6-2-3-1-5-4-2-1

6/// 3,4,2,3,2,2



1-5-4-6-2-3-1-2-4

Associer un graphe à une situation

Exercice 18

- Un grand domaine est partagé entre dix-neuf barons. Est-t-il possible que chacun ait comme voisins un, cinq ou neuf barons?

Considérons le graphe dont les sommets sont les barons. Deux sommets sont adjacents si les deux barons sont voisins.
Pour que chacun ait un il faudra que chaque sommet soit de derge 1. la somme des degrés sera égale à 19. Un tel graphe n'existe pas.
Pour que chacun ait un il faudra que chaque sommet soit de derge 5. la somme des degrés sera égale à 19x5=95. Un tel graphe n'existe pas.
Pour que chacun ait un il faudra que chaque sommet soit de derge 1. la somme des degrés sera égale à 19x9=171. Un tel graphe n'existe pas.

Il faut que le nombre de voisins soit pair pour que le problème admette une solution.

Associer un graphe à une situation

Exercice 19

- On appelle N le nombre de personnes ayant vécu ou vivant sur terre qui ont donné un nombre impair de poignées de main. Étudier la parité de N.

Considérons le graphe dont les sommets sont les gens qui ont habité la Terre et dont les arêtes représentent les poignées de mains échangées entre ces personnes.

Le degré d'un sommet représentera le nombre de poignées de main que la personne correspondantes à donné.

Sachant que la somme de degrés de tous les sommets dans un graphe est paire, donc le nombre de sommets de degré impair dans un graphe doit être pair. D'où le nombre de personnes qui ont donné un nombre impair de poignées de main est pair.

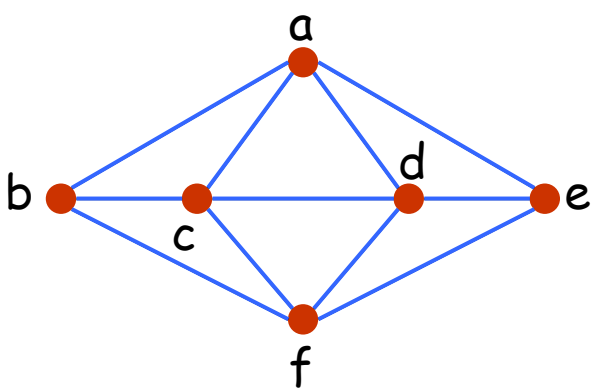
Associer un graphe à une situation

Exercice 20

On considère le graphe G suivant:

1) Justifier le fait que G n'admet pas de cycle eulérien mais qu'il admet des chaînes eulériennes.

2) Déterminer une chaîne eulérienne dans G.



b a c b f c d f e d a e

D'après le théorème d'Euler, G Admet un sommet (b) de degré impaire donc il n'admet pas de cycle eulérien.
Le nombre de sommets de degré impair est égal à deux (b et e) donc G admet au moins une chaîne eulérienne.

Une chaîne eulérienne : bacbfcdfedae

Associer un graphe à une situation

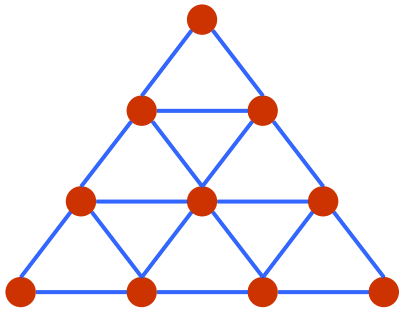
Exercice 21

1) Le graphe suivant admet-il un cycle eulérien?

Dans l'affirmative tracer un cycle.

2) On appelle Tn le graphe obtenu avec n rangées de triangles.

a) Combien d'arêtes possède Tn?



Tous les sommets sont de degré pair donc le graphe admet un cycle eulérien.

$T_1 = 3$, $T_2 = T_1+3x2 = 9$, $T_3 = T_2+3x3 = 18$

$T_n = T_{n-1} + 3n \quad \forall n \in IN^*$

$T_3 = T_1+3x2+3x3 = 3+3x2+3x3 = 3(1+2+3) = 18$

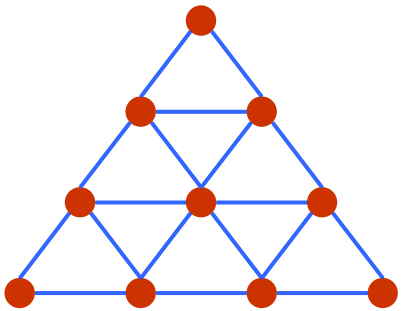
Montrons que: $T_n = 3 \times \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in IN^*$

Associer un graphe à une situation

Exercice 21

2) On appelle Tn le graphe obtenu avec n rangées de triangles.

a) Combien d'arêtes possède Tn?



Montrons que: $T_n = 3 \times \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in IN^*$

Vérifions pour n=1 : $T_1 = 3 \times \frac{1(1+1)}{2} = 3$; Vérifié

Soit $n \in IN^*$ tq $T_n = 3 \times \frac{n(n+1)}{2}$

Montrons que: $T_{n+1} = \frac{3(n+1)(n+2)}{2} \quad \forall n \in IN^*$

$T_{n+1} = T_n + 3n = \frac{3n(n+1)}{2} + 3n = \frac{3(n+1)(n+2)}{2}$

Conclusion: le nombre d'arêtes $T_n = 3 \times \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in IN^*$

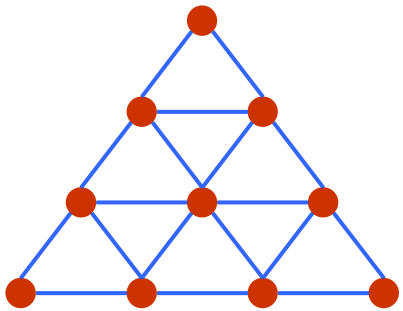
Associer un graphe à une situation

Exercice 21

2) On appelle Tn le graphe obtenu avec n rangées de triangles.

a) Combien d'arêtes possède Tn?

b) Tn possède-t-il un cycle eulérien?

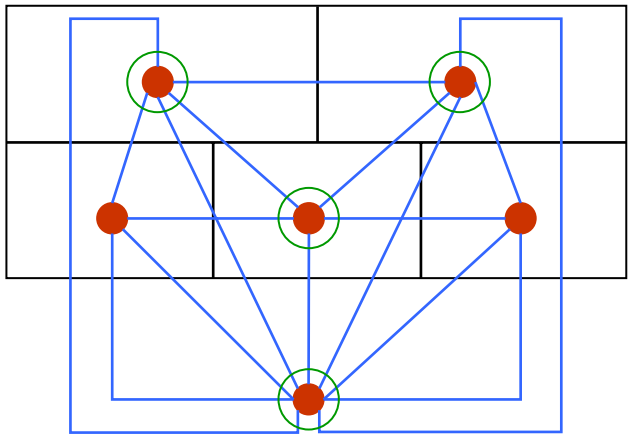


Chaque sommet ne peut être adjacent qu'à 2, 4 ou 6 arrêtes donc le graphe Tn admet un cycle eulérien.

Associer un graphe à une situation

Exercice 22

- Est-il possible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui coupe chacun des 16 segments de la figure suivante ?



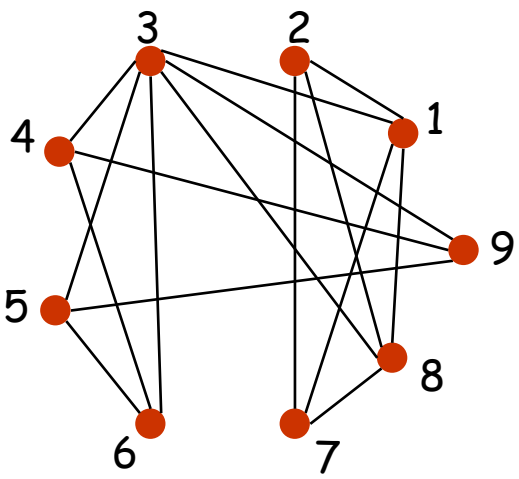
On peut associer un graphe (multigraphe) à cette figure de la façon suivante: les sommets représentent les régions (y compris la région extérieure) et deux sommets sont reliés par autant d'arêtes que le nombre de segments communs de leurs régions.

Le problème revient alors à effectuer un chemin eulérien dans ce graphe. Or, ce graphe contient 4 sommets de degré impair… c'est donc impossible.

Associer un graphe à une situation

Exercice 23

(Village en quarantaine) 9 villages sont reliés par un réseau de route. On peut les représenter par le graphe suivant:



Le sommet 3 est un point d'articulation du graphe. Si on met en quarantaine le 3ème village, il ne sera plus possible d'aller de 4 à 1 ou de 5 à 8…

Mais il y a un point sensible: si on met en quarantaine (on isole un des villages, il ne sera plus possible d'aller de certains villages à d'autres. Donner le nom s'un tel village.

Associer un graphe à une situation

Exercice 24

- On dispose d'un fil de fer de 120 cm. Est-il possible de préparer une carcasse de cube de 10 cm d'arête sans couper le fil ?

Un cube possède 12 arêtes ; donc, les arêtes d'un cube de 10 cm font au total 120 cm. Il s'agit de trouver une chaîne eulérienne sur le graphe du cube. Mais celui-ci possède 8 sommets d'ordre 3 : c'est donc impossible.

- Sinon, combien de fois au minimum faut-il couper le fil de fer pour fabriquer cette carcasse ?

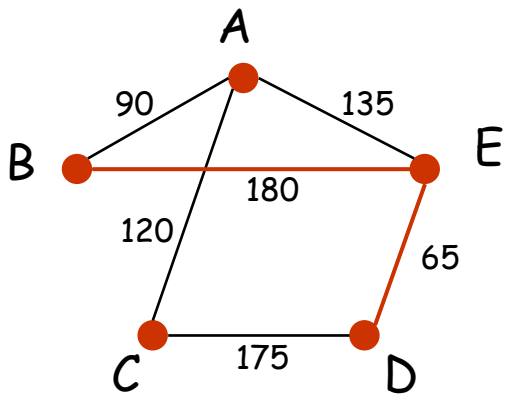
Pour savoir en combien de morceaux il faut couper, il faut chercher avec combien de chaînes distinctes on peut recouvrir le graphe du cube. Or chaque sommet doit être l'extrémité d'au moins une chaîne, sinon il serait de degré pair. Comme il y a 8 sommets, et que chaque chaîne a deux extrémités, il faut au moins 4 chaînes pour recouvrir le cube.

La plus courte chaîne

Exercice 25

- Une compagnie aérienne desserte différentes villes. Le tableau ci-contre sonne les durées de vol entre ces différentes villes. Déterminer le trajet le plus rapide entre les deux villes B et D.

	A	B	C	D	E
A		1h30	2h00		2h15
B					3h00
C				2h55	
D					1h05



le trajet le plus rapide entre les deux villes B et D est celui passant par la ville E d'une durée totale égale à 180 + 65 = 245mn = 4h05

L'algorithme de Dijkstra

- C 'est un algorithme de recherche de la plus courte chaîne entre deux sommets d'un graphe.

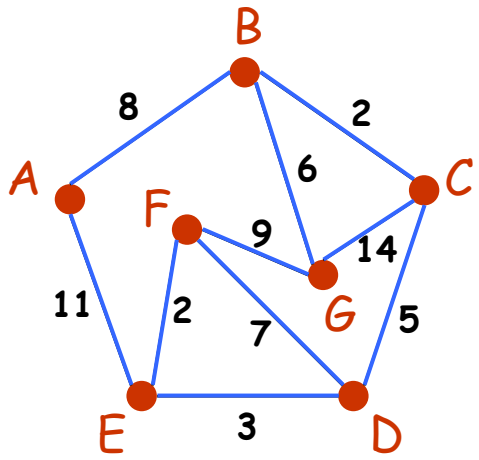
- L'algorithme de Dijkstra

Affecter le coefficient 0 à l'origine s (Cs=0) et ∞ à tous les autres sommets.
Tant qu'il reste encore des sommets non selectionnés:
    À tout sommet i adjacent au sommet sélectionné s, on affecte un cœfficient Ci = Cs + Csi avec Csi est la valeur de l'arête reliant s à i.
    On affecte ∞ à tous les autres sommets.
    On sélectionne le nouveau sommet s de plus petit coefficient.
Fin Tant que

L'algorithme de Dijkstra

Exercice 26

- Exécutez l'algorithme de Dijkstra sur le graphe suivant, à partir du sommet C, puis à partir du sommet F.



A	B	C	D	E	F	G	garde
∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	C
∞	2 C		5 C	∞	∞	14 C	B
10 B			5 C	∞	∞	8 B	D
10 B				8 D	12 D	8 B	E
10 B					10 E	8 B	G
10 B					10 E		F
10 B							A

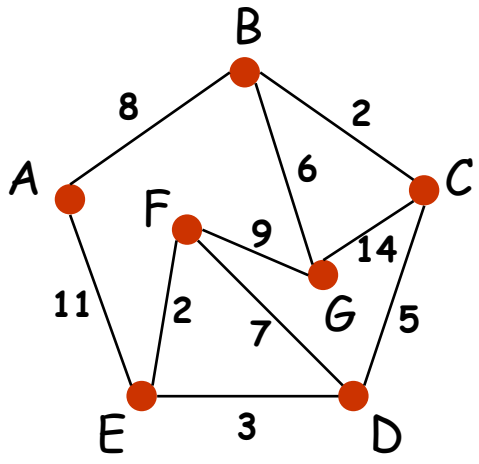
Chemins : C → B → A : 10 C → D : 5 C → D → E : 8

C → B : 2 C → D → E → F : 10 C → B → G : 8

L'algorithme de Dijkstra

Exercice 26

- Exécutez l'algorithme de Dijkstra sur le graphe suivant, à partir du sommet C, puis à partir du sommet F.



A	B	C	D	E	F	G	garde
∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	F
∞	∞	∞	7 F	2 F		9 F	E
13 E	∞	∞	5 E			9 F	D
13 E	∞	10 D				9 F	G
13 E	15 G	10 D					C
13 E	12 C						B
13 E							A

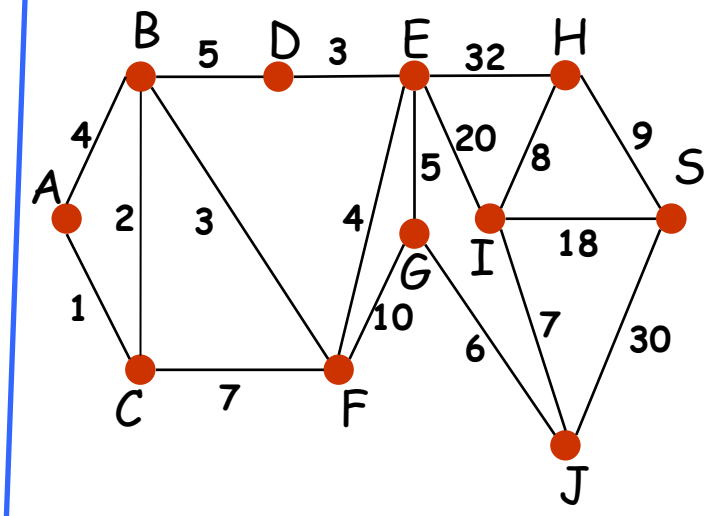
Chemins : F → E → A : 13 F → E → D → C : 10 F → E : 2

F → E → D → C → B : 12 F → E → D : 5 F → G : 8

L'algorithme de Dijkstra

Exercice 27

- Chercher le plus court chemin de A à S dans le graphe suivant:



A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	S	garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	4 A	1 A	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	C
	3 C		∞	∞	8 C	∞	∞	∞	∞	∞	B
			8 B	∞	6 B	∞	∞	∞	∞	∞	F
			8 B	10 F		16 F	∞	∞	∞	∞	D
				10 F		16 F	∞	∞	∞	∞	E
						15 E	42 E	30 E	∞	∞	G
							42 E	30 E	21 G	∞	J
							42 E	28 J		51 J	I
							36 I			46 I	H
										45 H	S

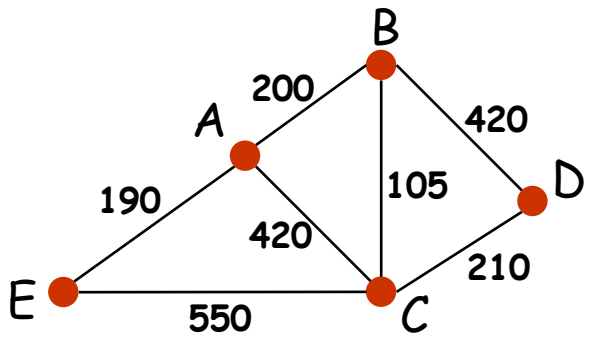
Le plus court chemin de A à S est de longueur 45; c'est ACBFEGJIHS.

L'algorithme de Dijkstra

Exercice 28

1) Le graphe ci-dessous représente un circuit autoroutier.

Déterminer le chemin le plus court entre D et E.



A	B	C	D	E	On garde
∞	∞	∞	0	∞	D
∞	420 D	210 D		∞	C
630 C	315 C			760 C	B
515 B				760 C	A
				705 A	E

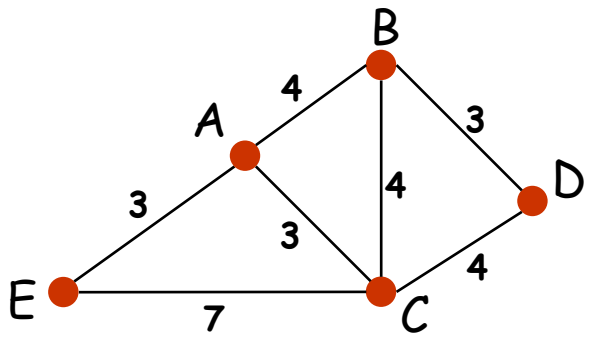
Le plus court chemin de D à E est D-C-B-A-E de longueur 705.

L'algorithme de Dijkstra

Exercice 28

2) On note maintenant sur les arêtes les prix des péages en DT,

Déterminer l'itinéraire le moins cher entre D et E.



A	B	C	D	E	On garde
∞	∞	∞	0	∞	D
∞	3 D	4 D		∞	B
7 B		4 D		∞	C
7 B				11 C	A
				10 A	E

Le plus court chemin de D à E est D-B-C-A-E de longueur 10.

Associer un graphe à une situation

Exercice 29

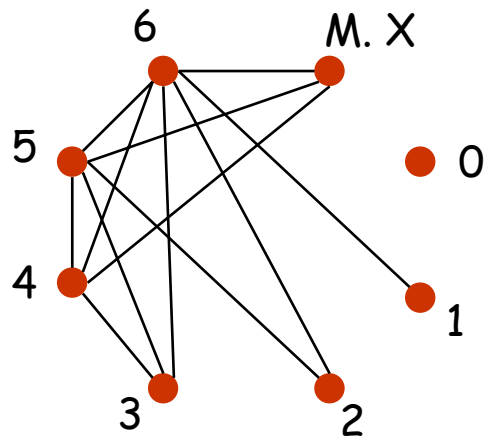
- M. et Mme X assistent à une réunion. Il y a trois autres couples dans l'assistance et plusieurs poignées de mains sont échangées. Personne ne serre sa propre main et les époux ne se serrent pas la main. Deux personnes quelconques de l'assemblée se serrent la main au plus une fois. M. X constate que les 7 autres personnes ont échangé des poignées de mains en nombres tous distincts.

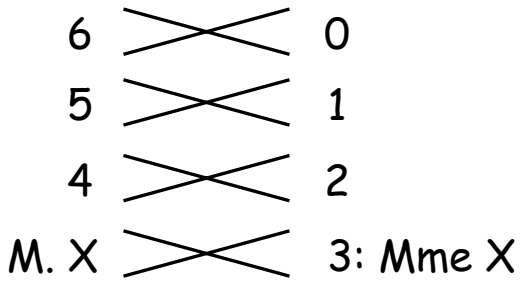
  Combien de poignées de mains M. et Mme X ont-ils échangé avec les autres membres de la réunion ?

Considérons le graphe dont les sommets sont les personnes qui ont assisté à la réunion et dont les arêtes représentent les poignées de mains échangées entre ces personnes.

Associer un graphe à une situation

Exercice 29





Une personne peut serrer la main d'au plus 6 autres personnes. Pour que le nombre de poignées de mains échangées soient tous distincts, il s'agit nécessairement des nombres 6, 5, 4, 3, 2, 1 et 0.

4ème année Économie et Gestion

Associer un graphe à une situation

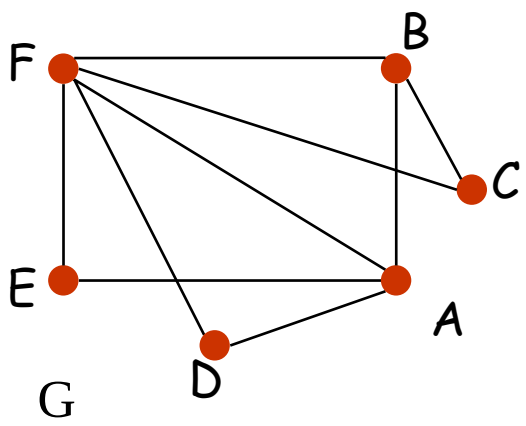
Exercice 1

- Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes en justifiant les réponses.

a) Le graphe G ci-contre admet un cycle eulérien. FAUX

b) Le graphe G ci-contre admet une chaîne eulérienne. VRAI

c) La chaîne D-A-B-C-F-E-F-A-E est une chaîne eulérienne de G. FAUX



Le graphe G admet deux sommets de degré impair donc il n'admet pas de cycle eulérien.

Le graphe G admet une chaîne eulérienne mais n'admet pas de cycle eulérien car il a exactement deux sommets de degré impair F et B. Ces deux sommets doivent être les deux extrémités de la chaîne eulérienne.

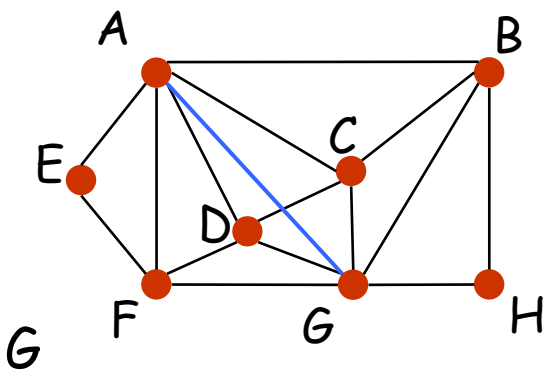
Associer un graphe à une situation

Exercice 2

- Soit le graphe G ci-contre.

  a) G admet-il une chaîne eulérienne? Pourquoi?

  b) G admet-il un cycle eulérien? Si oui lequel? Si non, proposer une modification du graphe pour qu'il en admette un.



Le graphe G admet une chaîne eulérienne car il a exactement deux sommets de degré impair A et G.

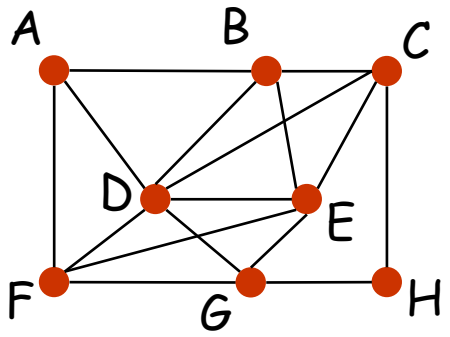
Le graphe G n'admet pas de cycle eulérien. Pour qu'il en admette il faut que tous les sommets soient de degré pair.
Il suffit d'ajouter une arrête entre les deux sommets de degré impair A et G.

Associer un graphe à une situation

Exercice 3

- Le ramassage des ordures ménagères dans une villes dont un plan est repésentés ci-contre, à l'aide d'un graphe, doit lêtre effectué en minimisant le trajet à effectuer. Lees sommets sont les différents carrefours et les arêtes sont les voies de circulation.

a) Est-t-il possible de partir d'un carrefour et d'y revenir en empruntant chaque voie une fois et une seule.



G

Le problème revient à chercher un cycle eulérien. Le graphe G admet deux sommets de degré impair A et F, donc le graphe n'admet pas de cycle eulérien. D'où il n'est pas possible de partir d'un carrefour et d'y revenir en empruntant chaque voie une fois et une seule.

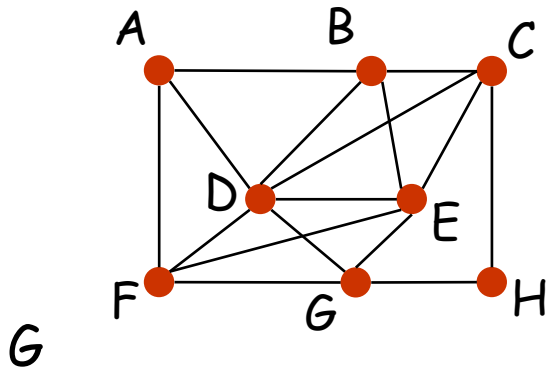
Associer un graphe à une situation

Exercice 3

- Le ramassage des ordures ménagères dans une villes dont un plan est repésentés ci-contre, à l'aide d'un graphe, doit lêtre effectué en minimisant le trajet à effectuer. Lees sommets sont les différents carrefours et les arêtes sont les voies de circulation.

a) Est-t-il possible de partir d'un carrefour et d'y revenir en empruntant chaque voie une fois et une seule.

b) Le graphe ci-dessus admet-il une chaîne eulérienne? Si oui, en déterminer une.



Le graphe G admet exactement deux sommets de degré impair donc admet u ne chaîne eulérienne.

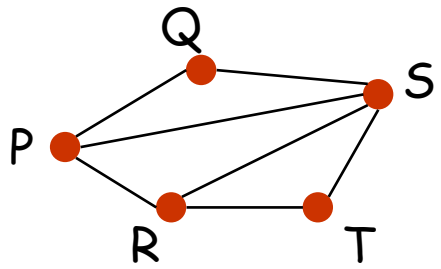
A-B-D-A-F-G-D-F-E-D-C-B-E-G-F-C-E-F

Associer un graphe à une situation

Exercice 4

- Pour chaque question, cocher une case sur chaque ligne, la case « Vrai » ou la case « Faux ».

1) Dans le graphe ci-contre, il est possible de définir une chaîne eulérienne…



	Vrai	Faux
a) Partant de Q et finissant en T.	☐	☒
b) Partant de S et finissant en S.	☐	☒
c) Partant de P et finissant en R.	☒	☐

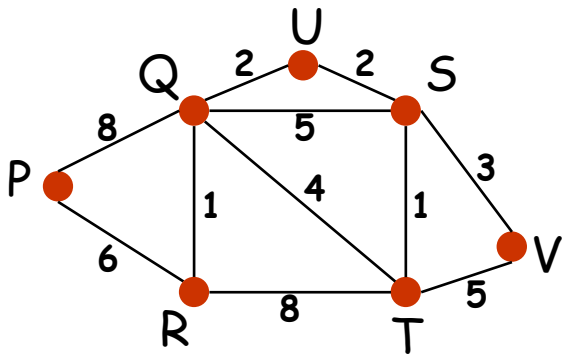
Associer un graphe à une situation

Exercice 4

- Pour chaque question, cocher une case sur chaque ligne, la case « Vrai » ou la case « Faux ».

2) Dans le graphe pondéré ci-contre, la plus courte chaîne pour aller de P à V …

	Vrai	Faux
a) a pour poids 16.	☐	☒
b) a pour poids 14.	☒	☐



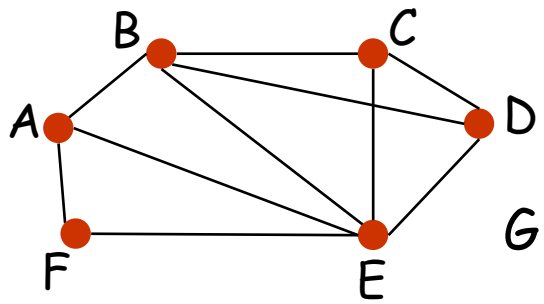
P	Q	R	S	T	U	V	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	P
	8 P	6 P	∞	∞	∞	∞	R
	7 R		∞	14 R	∞	∞	Q
			12 Q	14 R	9 Q	∞	U
			11 U	14 R		∞	S
				14 R		14 S	V

P-R-Q-T-S-V

Associer un graphe à une situation

Exercice 5

a) Citer deux chaînes de longueur 3 reliant les sommets A et D du graphe G ci-contre.



A-B-C-D

A-E-B-D

b) Pour chacune des chaînes ci-dessous, donner sa longueur, dire se elle est fermée et préciser s'il s'agit d'un cycle.

A-B-D-C-F-A; A-E-C-F-E-A et B-D-C-F-E-A:

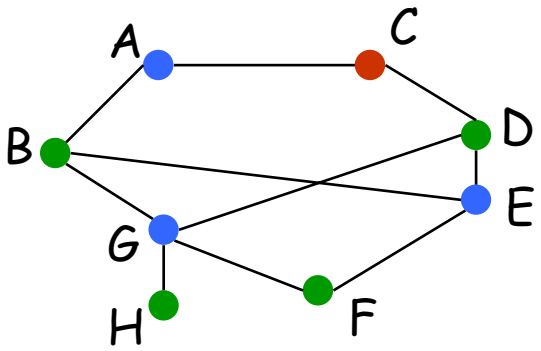
on appelle chaîne une suite s_0; s_1;...; s_n telle que deux sommets consécutifs soient adjacents.

Coloriage d'un graphe

Exercice 6

- Recopier le graphe ci-dessous et utiliser l'algorithme de welch-Powell pour le colorier.

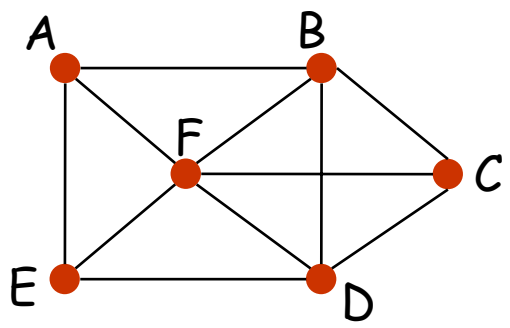
G	B	D	E	A	C	F	H
3	3	3	3	2	2	2	1



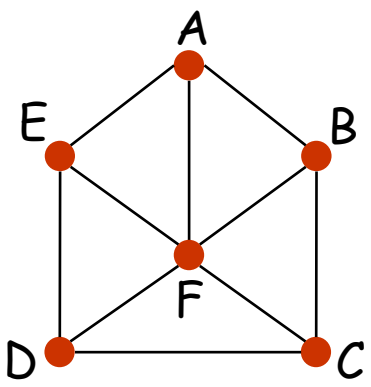
Coloriage d'un graphe

Exercice 7

- Encadrer le nombre chromatique de chacun des graphes ci-dessous par des nombres entiers (il n'est pas demandé de chercher de nombre chromatique).



$4 \leq \ (G) \leq 6$

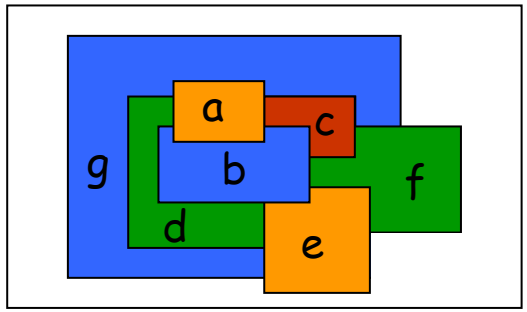


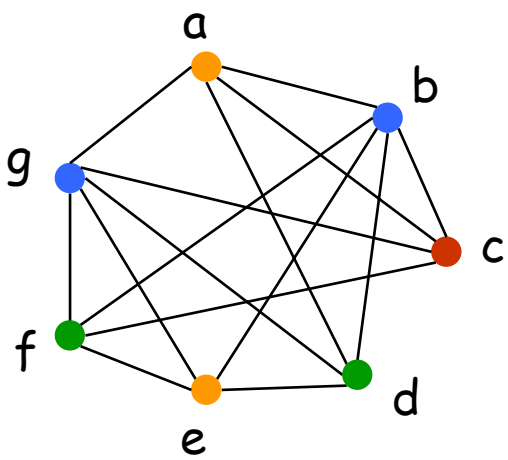
$3 \leq \ (G) \leq 6$

Coloriage d'un graphe

Exercice 8

- Le plan ci-dessus représente différents échantillons de papier posés les uns sur les autres délimitent ainsi sept zones à colorier de telle façon que si deux d'entre elles ont une frontière commune alors elles seront de couleurs différentes..
  - a) Représenter la situation par un graphe G
  - b) Colorier le graphe G avec l'algorithme de Welch-Powell.
  - c) Reproduire le plan et colorier comme souhaité.





b	g	d	e	f	a	c
5	5	4	4	4	4	4

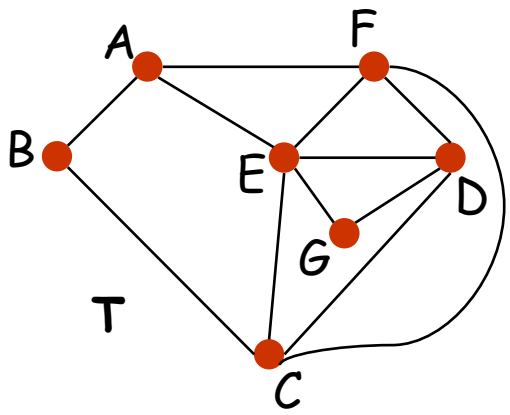
Coloriage d'un graphe

Exercice 9

T est le graphe ci-contre.

1) On note $\gamma(T)$ le nombre chromatique de T.

a) Dire pourquoi le sous graphe constitué des sommets C, D, E et F est complet.



Les sommets C, D, E et F sont deux à deux adjacents, toutes les arrêtes possibles de ce sous graphe existent. C'est un sous-graphe complet.

Coloriage d'un graphe

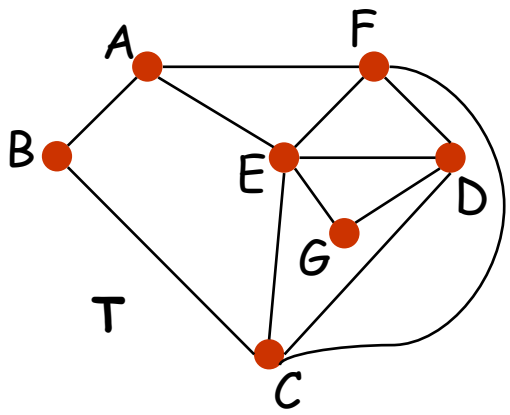
Exercice 9

- T est le graphe ci-contre.

1) On note $\gamma(T)$ le nombre chromatique de T.

a) Dire pourquoi le sous graphe constitué des sommets C, D, E et F est complet.

b) Démontrer que $4 \leq \gamma(T) \leq 6$.



Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal au plus grand degré de ses sommets k majoré par 1: $\gamma(T) \leq k+1$

k=5 donc $\gamma(T) \leq 6$.

Le nombre chromatique d'un graphe est supérieur ou égal à l'ordre de tous ses sous graphes complets.

$4 \leq \gamma(T) \leq 6$

Coloriage d'un graphe

Exercice 9

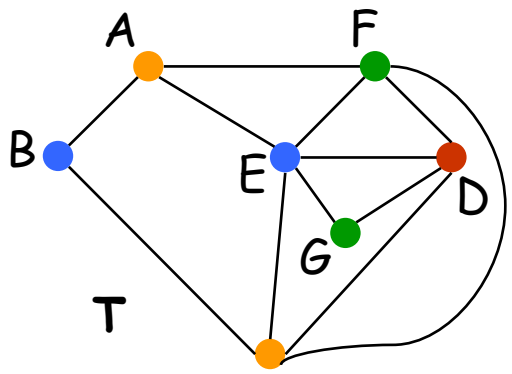
T est le graphe ci-contre.

1) On note $\gamma(T)$ le nombre chromatique de T.

a) Dire pourquoi le sous graphe constitué des sommets C, D, E et F est complet.

b) Démontrer que $4 \leq \gamma(T) \leq 6$.

c) Déterminer la valeur de $\gamma(T)$



E	F	C	D	A	B	G
5	4	4	4	4	4	4

(G) = 4

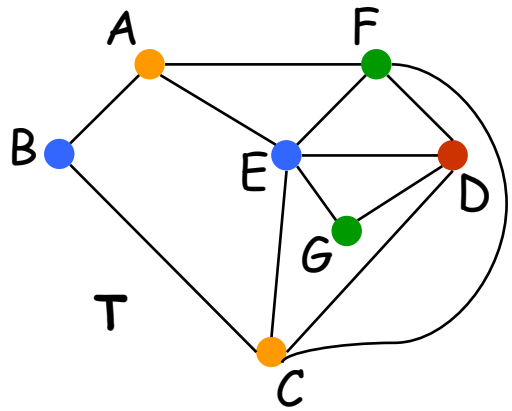
2) On considère un groupe d'élèves notés A, B, C, D, E, F et G.
Pour un exposé, les élèves se mettent en équipes, mais il faut respecter les incompatibilités entre les élèves.

Coloriage d'un graphe

Exercice 9

- Dans le tableau ci-après, chaque croix indique une incompatibilité entre les élèves correspondants.

	A	B	C	D	E	F	G
A		X				X	
B	X		X				
C		X		X	X	X	
D			X		X	X	X
E	X		X	X		X	X
F	X		X	X	X		
G				X	X		



a) Si l'on décide de modéliser ce tableau d'incompatibilité par le graphe T, quel sens faut-il donner à l'existence d'une arrête entre deux sommets?

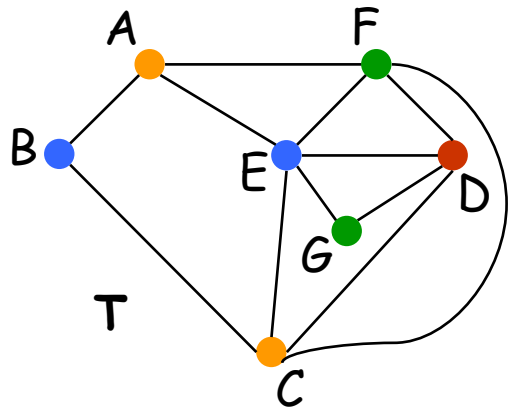
Deux sommets sont adjacents s'il y a une incompatibilité entre les élèves correspondants.

Coloriage d'un graphe

Exercice 9

- Dans le tableau ci-après, chaque croix indique une incompatibilité entre les élèves correspondants.

	A	B	C	D	E	F	G
A		X				X	
B	X		X				
C		X		X	X	X	
D			X		X	X	X
E	X		X	X		X	X
F	X		X	X	X		
G				X	X		



a) Si l'on décide de modéliser ce tableau d'incompatibilité par le graphe T, quel sens faut-il donner à l'existence d'une arrête entre deux sommets?

b) Combien d'équipes faudra-t-il créer en minimum? 4 équipes

Proposer une répartition des élèves en équipes (une équipe peut comporter un seul élève).

{B, E} {F, G} {A, C} {D}

Coloriage d'un graphe

Exercice 10

- Un laboratoire de produits pharmaceutiques de première urgence doit livrer un médicament le plus rapidement possible à un certain nombre de pharmacie de la région. Il ne dispose à ce moment que d'un seul véhicule. Le départ est de A et les différentes pharmacies sont nommées B, S, D, E, F et G.
  Mettre au point un parcours qui soit le plus rapide possible, sachant que le temps de parcours sont indiqués dans le tableau ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F	G
A		8	5	6	3	5	2
B	8		7	9	6	2	9
C	9	7		3	6	5	5
D	6	9	3		9	8	4
E	3	6	6	9		4	6
F	5	2	5	8	4		7
G	2	9	5	4	6	7	

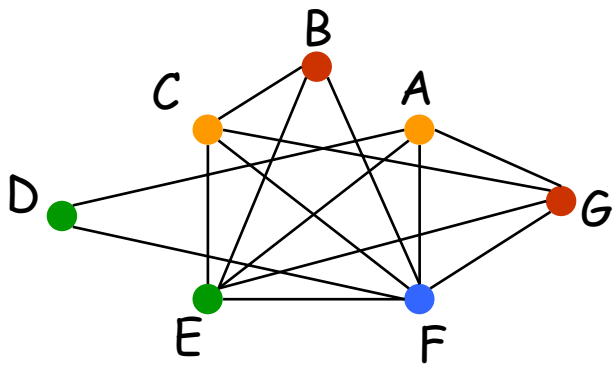
Il s'agit de la recherche de la plus courte chaîne Hamiltonienne !

Hors programme !!!!

Coloriage d'un graphe

Exercice 11

Un concert de solidarité est organisé dans une grande salle de spectacle. A ce concert sont conviés sept artistes de renommée internationale: A, B, C, D, E, F, et G.
Les différents musiciens invites refusant de jouer avec certains autres, l'organisateur du concert doit prévoir plusieurs parties de spectacle. Les arêtes du graphe T ci-contre indiquent quels sont les musiciens qui refusent de jouer entre eux.



a) Colorier le graphe T.

b) Combien de parties l'organisateur du concert doit-il prévoir? 4 parties

c) Proposer une répartition des musiciens pour chacune de des parties.

F	E	C	A	G	B	D
6	5	4	4	4	3	2

{F} {E, D} {C, A} {G, B}

Coloriage d'un graphe

Exercice 12

- Le schéma suivant représente un carrefour. Le tableau suivant précise les «franchissements» possibles de ce carrefour. (la circulation de A vers E est considérée comme un «franchissement» même si on ne traverse pas le carrefour).

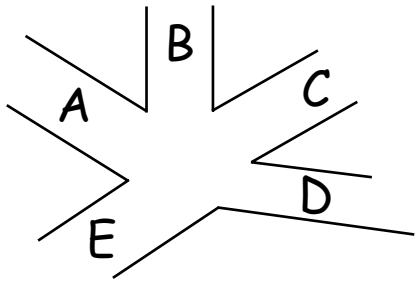
En arrivant par…	A	B	C	D	E
Il est possible d'aller en…	C, E	A, E, D	A, D	C, A	C, D

Les franchissements A-C et B-E ne peuvent naturellement pas être autorisés simultanément sous peine de collision.

a) Modélisez cette situation à l'aide d'un graphe dont:

× les sommets représentent les franchissements possibles

× les arêtes reliant les sommets représentant des franchissements ne peuvent pas être simultanés sous peine de collision.



Coloriage d'un graphe

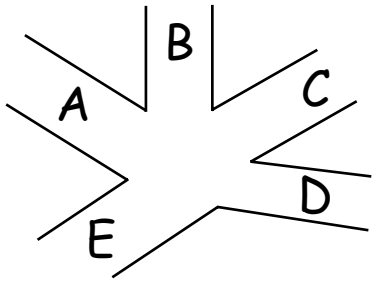
Exercice 12

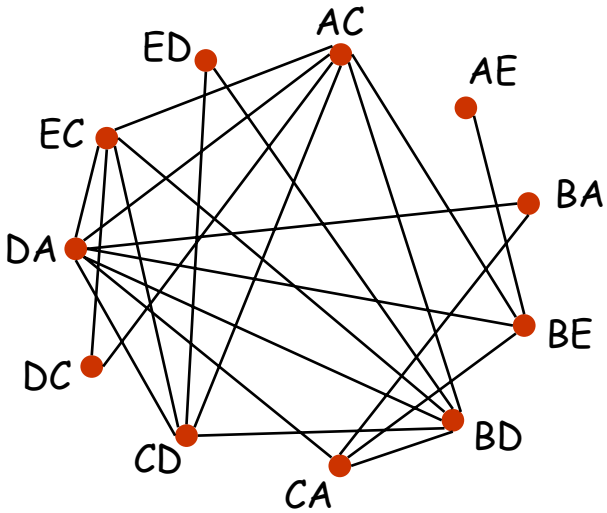
a) Modélisez cette situation à l'aide d'un graphe dont:

× les sommets représentent les franchissements possibles

En arrivant par…	A	B	C	D	E
Il est possible d'aller en…	C, E	A, E, D	A, D	C, A	C, D

× les arêtes reliant les sommets représentant des franchissements ne peuvent pas être simultanés sous peine de collision.





Coloriage d'un graphe

Exercice 12

a) Modélisez cette situation à l'aide d'un graphe dont:

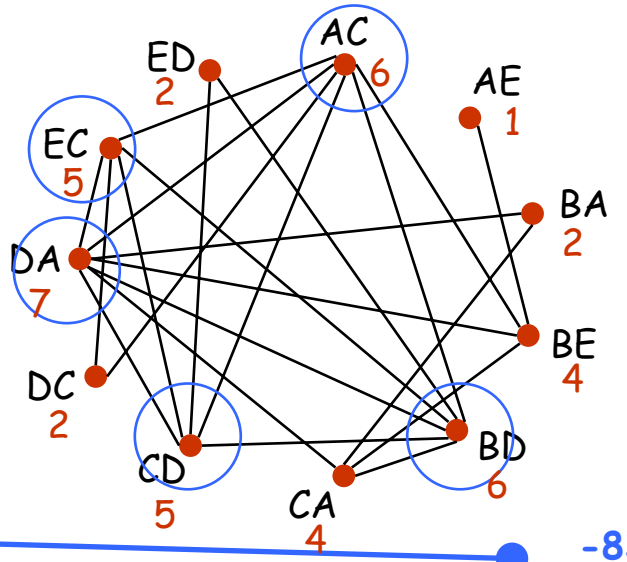
b) Montrer que EC, AC, **BD**, CD, DA est un sous graphe complet d'ordre 5.

Les 5 sommets du sous graphe sont adjacents deux à deux donc le sous graphe est complet d'ordre 5

c) Que peut-on dire de sommet DA? En déduire un encadrement du nombre chromatique.

Le sommet DA est le sommet ayant le plus haut degré du graphe G. Il est de degré 7.

$5 \leq \gamma(G) \leq 8.$



Coloriage d'un graphe

Exercice 12

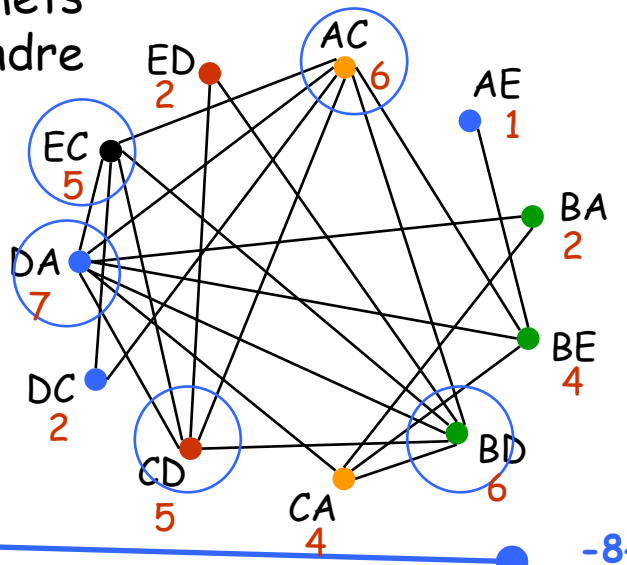
a) Modélisez cette situation à l'aide d'un graphe dont:

b) Montrer que EC, AC, **BD**, CD, DA est un sous graphe complet d'ordre 5.

c) Que peut-on dire de sommet DA? En déduire un encadrement du nombre chromatique.

d) Proposer une coloration du graphe. En déduire son nombre chromatique.

e) Que peut-on dire d'un ensemble de sommets ayant même couleur ? À quoi peut correspondre le nombre chromatique de ce graphe ?



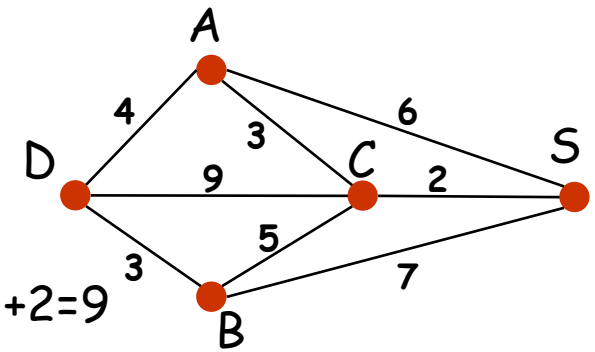
Un ensemble de sommets de même couleur regroupe un ensemble de trajets pouvant s'effectuer en même temps

Le nombre chromatique correspond au nombre minimum de «cycles» que doivent respecter les feux de signalisation de ce carrefour.

Coloriage d'un graphe

Exercice 13

- Le graphe suivant représente les différents itinéraires pour aller de D à S. Le poids des arêtes est le coût, en DT, du trajet effectué entre deux villes nommées par des sommets.



a) Quel est le poids de la chaîne D-A-C-S?

Def: le poids d'une chaîne est la somme des poids des arêtes orientées qui la composent.

⇨ Le poids de la chaîne D-A-C-S est égal à 4+3+2=9

b) Quelles est la chaîne de poids minimal?

⇨ La chaîne de poids minimal est: D-A-C-S.

c) Quelle est la longueur de la chaîne D-A-C-S?

⇨ La chaîne D-A-C-S est de longueur 3.

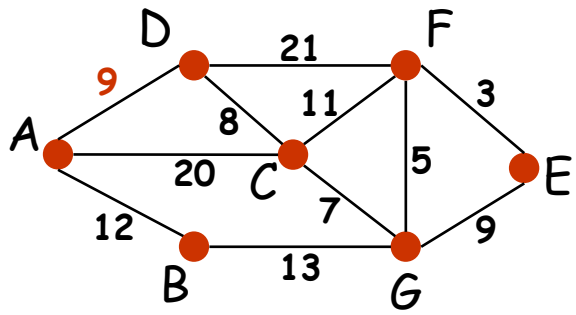
Def: La longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent.

A	B	C	D	S	garde
∞	∞	∞	0	∞	D
4 D	3 D	9 D		∞	B
4 D		8 B		10 B	A
		7 A		10 A	C
				9 C	S

Coloriage d'un graphe

Exercice 14

Des touristes sont logés dans un hôtel noté A. Un guide fait visiter six cites touristiques notés B, C, D, E, F et G.
Les tronçons de route qu'il peut emprunter sont représentés sur le graphe ci-contre: (le long de chaque arrête figure la distance en kilomètres de différents tronçons).



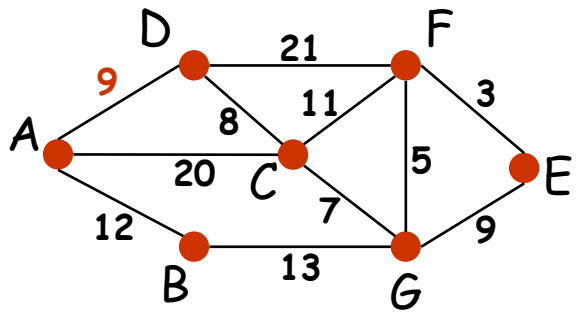
1) a) A partir de l'hôtel, le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une fois et une seule sur chacun d'eux? Justifier la réponse.

Le problème revient à chercher si le graphe admet une chaîne eulérienne. Le graphe admet exactement deux sommets de degré impair A et D, donc le graphe admet une chaîne eulérienne d'extrémités A et D. D'où il emprunter tous les tronçons de route en passant une fois et une seule sur chacun d'eux.

Coloriage d'un graphe

Exercice 14

- Des touristes sont logés dans un hôtel noté A. Un guide fait visiter six cites touristiques notés B, C, D, E, F et G.
  Les tronçons de route qu'il peut emprunter sont représentés sur le graphe ci-contre: (le long de chaque arrête figure la distance en kilomètres de différents tronçons).



1) a) A partir de l'hôtel, le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une fois et une seule sur chacun d'eux? Justifier la réponse.

b) Même question s'il doit obligatoirement terminer son circuit à l'hôtel.

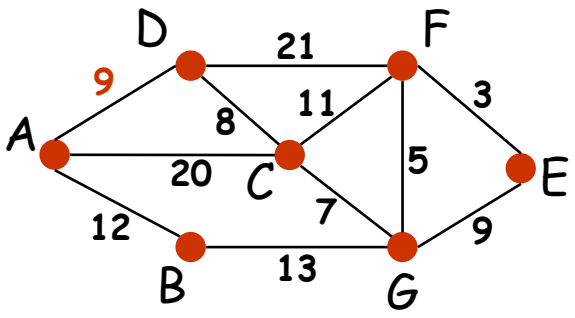
Le graphe n'admet pas un cycle eulérien car il y a deux sommets de degré impair. D'où il ne peut emprunter pas tous les tronçons de route en passant une fois et une seule sur chacun d'eux et en terminant son circuit à l'hôtel.

Coloriage d'un graphe

Exercice 14

2) Déterminer le plus court chemin menant de l'hôtel A au site E. Justifier la réponse.

A	B	C	D	E	F	G	garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	12 A	20 A	9 A	∞	∞	∞	D
	12 A	17 D		∞	30 D	∞	B
		17 D		∞	30 D	25 B	C
				∞	28 C	24 C	G
				33 G	28 C		F
				31 F			E



Le plus court chemin de A à E est de longueur 31: A-D-C-F-E

Coloriage d'un graphe

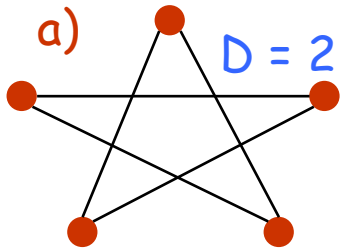
Exercice 15

1) Caractériser les graphes de diamètre 1.

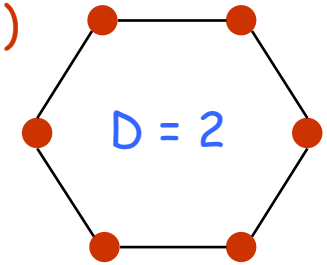
Le diamètre d'un graphe connexe est la plus grande distance de deux sommets. les graphes de diamètre 1 sont alors des graphes complets.

2) Trouver le diamètre des graphes ci-dessous.

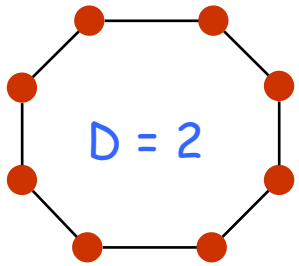
a)



b)

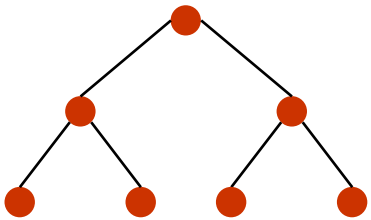


c)

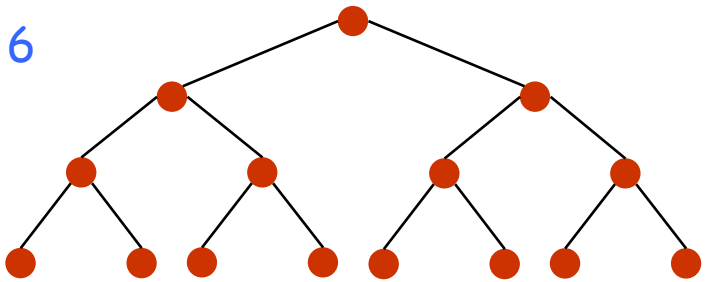


3) Quel est le diamètre de chacun des deux graphes ci-dessous?

D = 4

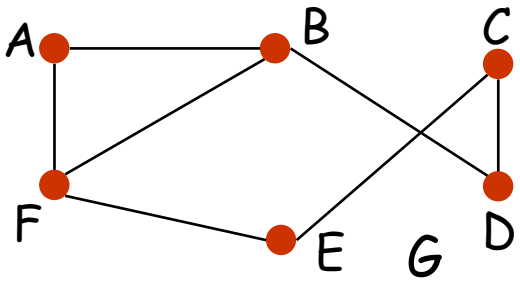


D = 6



Coloriage d'un graphe

Exercice 16



Soit le graphe G ci-contre.

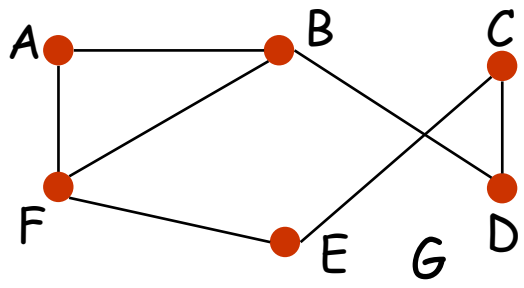
1) Donner la matrice M associée à G en écrivant les sommets dans l'ordre alphabétique.

$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Coloriage d'un graphe

Exercice 16

Soit le graphe G ci-contre.



2) On a calculé les matrice M^2 et M^5 suivantes:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad M^5 = \begin{pmatrix} 14 & 21 & 12 & 9 & 9 & 21 \\ 21 & 18 & 9 & 19 & 14 & 26 \\ 12 & 9 & 2 & 12 & 12 & 9 \\ 9 & 19 & 12 & 4 & 6 & 14 \\ 9 & 14 & 12 & 7 & 4 & 19 \\ 21 & 26 & 9 & 14 & 19 & 18 \end{pmatrix}$$

a) En déduire le nombre de chaînes de longueur 2 reliant A et D. Les écrire.

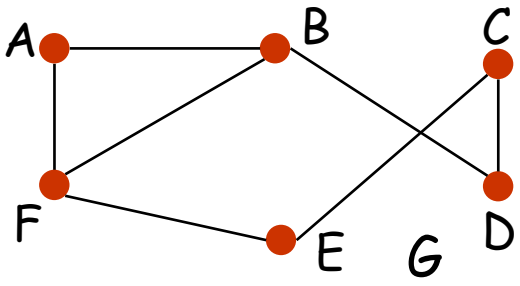
Def: Soit G un graphe de matrice d'adjacence A. Le nombre de chaînes de longueur n joignant le sommet i au sommet j est donnée par le terme d'indice i j de la matrice An.

Une seule chaîne: A-B-D

Coloriage d'un graphe

Exercice 16

Soit le graphe G ci-contre.



2) On a calculé les matrice M^2 et M^5 suivantes:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad M^5 = \begin{pmatrix} 14 & 21 & 12 & 9 & 9 & 21 \\ 21 & 18 & 9 & 19 & 14 & 26 \\ 12 & 9 & 2 & 12 & 12 & 9 \\ 9 & 19 & 12 & 4 & 6 & 14 \\ 9 & 14 & 12 & 7 & 4 & 19 \\ 21 & 26 & 9 & 14 & 19 & 18 \end{pmatrix}$$

a) En déduire le nombre de chaînes de longueur 2 reliant A et D. Les écrire.

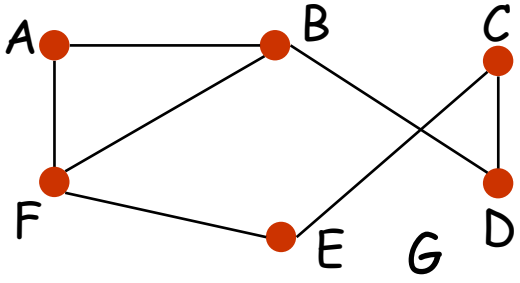
b) Entre quels sommets de ce graphe y a-il le plus de chaînes de longueur 2? Les écrire.

Le nombre maximal de chaînes de longueur 2 ayant comme extrémités le même couple de sommets est 3. 3 chaînes du sommet B au sommet B ou 3 chaînes du sommet C au sommet C.

B-A-B, B-F-B et B-D-B

Coloriage d'un graphe

Exercice 16



Soit le graphe G ci-contre.

2) On a calculé les matrice M^2 et M^5 suivantes:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad M^5 = \begin{pmatrix} 14 & 21 & 12 & 9 & 9 & 21 \\ 21 & 18 & 9 & 19 & 14 & 26 \\ 12 & 9 & 2 & 12 & 12 & 9 \\ 9 & 19 & 12 & 4 & 6 & 14 \\ 9 & 14 & 12 & 7 & 4 & 19 \\ 21 & 26 & 9 & 14 & 19 & 18 \end{pmatrix}$$

a) En déduire le nombre de chaînes de longueur 2 reliant A et D. Les écrire.

b) Entre quels sommets de ce graphe y a-il le plus de chaînes de longueur 2? Les écrire.

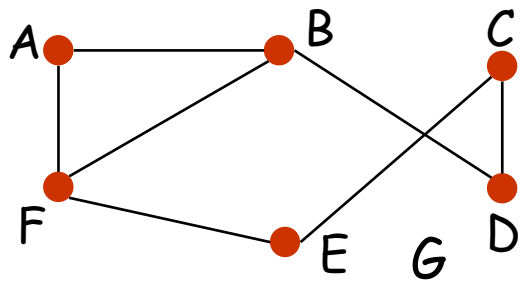
c) Entre quels sommets de ce graphe y a-il 4 chaînes de longueur 2?

Pas de 4 dans M^2, Pas de sommets entre lesquels il y a 4 chaînes de longueur 2.

Coloriage d'un graphe

Exercice 16

Soit le graphe G ci-contre.



2) On a calculé les matrice M^2 et M^5 suivantes:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad M^5 = \begin{pmatrix} 14 & 21 & 12 & 9 & 9 & 21 \\ 21 & 18 & 9 & 19 & 14 & 26 \\ 12 & 9 & 2 & 12 & 12 & 9 \\ 9 & 19 & 12 & 4 & 6 & 14 \\ 9 & 14 & 12 & 7 & 4 & 19 \\ 21 & 26 & 9 & 14 & 19 & 18 \end{pmatrix}$$

a) En déduire le nombre de chaînes de longueur 2 reliant A et D. Les écrire.

b) Entre quels sommets de ce graphe y a-il le plus de chaînes de longueur 2? Les écrire.

c) Entre quels sommets de ce graphe y a-il 4 chaînes de longueur 2?

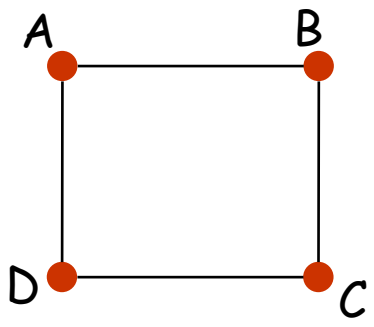
d) Déterminer le nombre de chaînes de longueur 5 reliant B et F. 26

Coloriage d'un graphe

Exercice 17

- Représenter un graphe non orienté dont la matrice associée est le suivante:

$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



Coloriage d'un graphe

Exercice 18

- M est la matrice d'un graphe non orienté G.

a) Quel est l'ordre de G? 6 sommets

b) Calculer la somme des degrés des sommets de G.

$$\Sigma \text{ degrés} = \sum_{i=1} \sum_{j=1} a_{ij} = 20$$

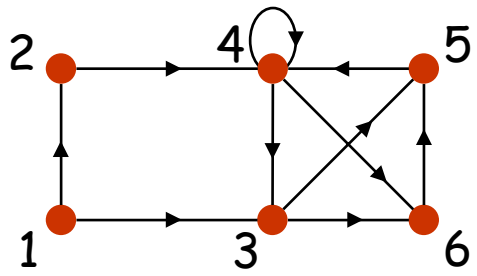
c) Quel est le nombre d'arêtes de G?

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \frac{\sum_{i=1} \sum_{j=1} a_{ij}}{2} = 10$$

Coloriage d'un graphe

Exercice 19



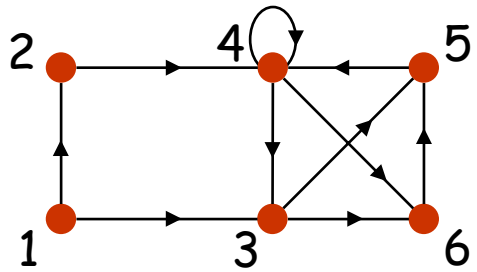
On considère le graphe orienté ci-contre.

a) Écrire la matrice A associée à ce graphe

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Coloriage d'un graphe

Exercice 19



On considère le graphe orienté ci-contre.

a) Écrire la matrice A associée à ce graphe

b) On a calculé les matrices A^5 et A^6 suivantes:

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 10 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 16 & 15 & 15 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

c) Donner le nombre de chaînes orientées de longueur 5 du sommet 1 au sommet 5. Les écrire.

5 chaînes:

1 - 3 - 5 - 4 - 6 - 5

1 - 3 - 5 - 4 - 3 - 5

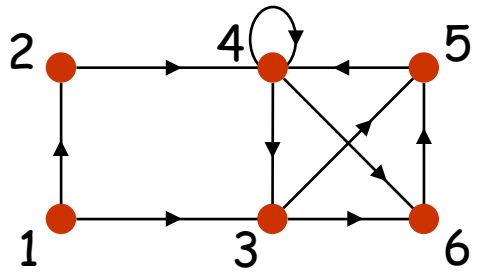
1 - 2 - 4 - 4 - 3 - 5

1 - 2 - 4 - 4 - 6 - 5

1 - 2 - 4 - 3 - 6 - 5

Coloriage d'un graphe

Exercice 19



On considère le graphe orienté ci-contre.

a) Écrire la matrice A associée à ce graphe

b) On a calculé les matrices A^5 et A^6 suivantes:

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 10 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 16 & 15 & 15 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

c) Donner le nombre de chaînes orientées de longueur 5 du sommet 1 au sommet 5. Les écrire.

d) Le graphe contient-il des chaînes orientées fermées? Si oui combien?

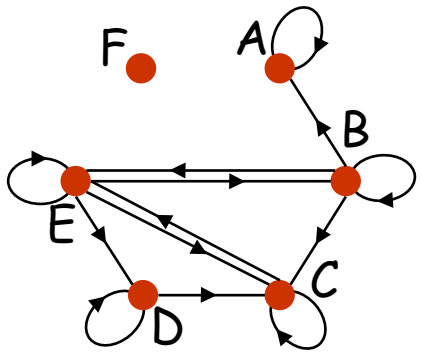
Oui; une infinité de chaînes orientées fermées.

Coloriage d'un graphe

Exercice 20

- Dans un groupe de six personnes chacune d'elles doit choisir celles en qui elle a confiance pour partager ces acticités de loisir. A, B, C, D, E et F ces personnes. On constate que:
  - A n'a confiance qu'en lui-même, mais possède la confiance de B.
  - E a confiance en B, C et D mais n'a la confiance que de B et C.
  - B et D ont confiance en C.
  - F est très méfiant et n'a même pas la confiance en soi.

a) Représenter cette situation à l'aide d'un graphe orienté dans lequel les sommets représentent ces six personnes et les arêtes orientées signifient « a confiance en ».



b) Quelle est la personne qui a la confiance du plus grand nombre d'entre elles?

⇨ Le C a la confiance du plus grand nombre de personnes.

Coloriage d'un graphe

Exercice 21

- Cinq personnes notées A, B, C, D et E et peuvent communiquer entre elles soit par téléphone, soit par courrier électronique.
  A et B, A et C, B et C peuvent se téléphoner. C peut envoyer et recevoir du courrier électronique avec D et E.

a) Recopier et compléter le tableau suivant:

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	0
B	1	0	1	0	0
C	1	1	0	1	1
D	0	0	1	0	0
E	0	0	1	0	0

Dans ce tableau, on inscrit 1 au croisement de la ligne X et la colonne Y si la personne de la ligne X peut communiquer avec la personne de colonne Y et 0 sinon.

b) Écrire la matrice associée à cette situation.

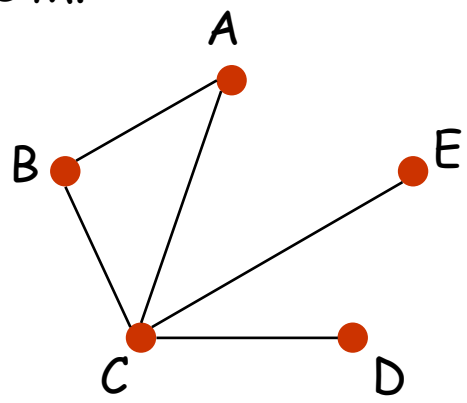
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Coloriage d'un graphe

Exercice 21

c) Construire le graphe associé à cette matrice M.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



d) Quelle personne peut communiquer avec le plus grand nombre directement?

C'est la personne correspondant au sommet ayant le plus haut degré: le C

Coloriage d'un graphe

Exercice 21

e) On admet que deux personnes peuvent communiquer par l'intermédiaire d'un troisième.
Si X peut communiquer directement avec Y et Y directement avec Z.
On admet que la matrice M^2 est:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice $S = M + M^2$

f) Déduire le résultat que chacune des cinq personnes peut communiquer avec tout autre personne directement ou indirectement.

La matrice S n'admet pas de 0, donc il y a au une connexion entre 2 personnes soit directement (au moins un 1 dans la matrice M) ou indirectement (au moins un 1 dans la matrice M^2).

Coloriage d'un graphe

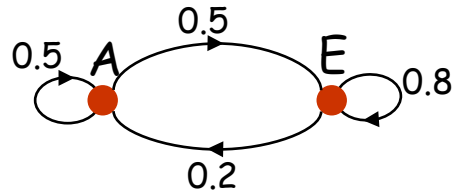
Exercice 22

- Dans un club de football, lors de longues séances de tirs au but, le gardien se comporte de la manière suivante :
  - × s'il a arrête un tir, il arrête suivant avec la probabilité de 0,5.
  - × s'il a encaissé un but, il arrête le tir suivant avec la probabilité de 0,2.

1) a) Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste.

b) Donner la matrice de transition de ce graphe.

$$M = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$



2) Le gardien n'a pas arrêté le premier tir. Quelle est la probabilité qu'il arrête le troisième tir ?

$P_n = P_1 \times M^{n-1}$ $\quad P_3 = P_1 \times M^2 = (1 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 0.35 & 0.65 \\ 0.26 & 0.74 \end{pmatrix} = (0.35 \quad 0.65)$

$\Rightarrow P = 0.35$

Coloriage d'un graphe

Exercice 23

- Un théâtre propose deux types d'abonnements pour une année : un abonnement A donnant droit à six spectacles ou un abonnement B donnant droit à trois spectacles.

  On considère un groupe de 2500 personnes qui s'abonnent tous les ans. n étant un entier naturel, on note:

  a_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement A l'année n;

  b_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement B l'année n;

  P_n la matrice $(a_n\ b_n)$ traduisant l'état probabiliste à l'année n.

  Tous les ans 85% des personnes qui ont choisi l'abonnement A et 55% des personnes qui ont choisi l'abonnement B conservent ce type d'abonnement l'année suivante. Les autres personnes changent d'abonnement.

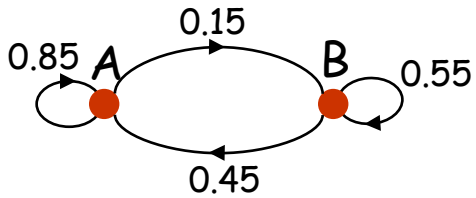
Coloriage d'un graphe

Exercice 23

1) On suppose que, l'année zéro, 1500 personnes ont choisi l'abonnement A et 1000 l'abonnement B. Déterminer l'état initial $P_0 = (a_0\ b_0)$

$\Rightarrow$ $(a_0\ b_0) = (1500/2500 \quad 1000/2500) = (3/5 \quad 2/5)$

2) a) Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.



b) Déterminer la matrice de transition M de ce graphe. $M = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.15 \\ 0.45 & 0.55 \end{pmatrix}$

c) En déduire le nombre d'abonnés l'année un.

$\Rightarrow$ $P_1 = P_0 \times M = (\ 0.6 \quad 0.4\ ) \times \begin{pmatrix} 0.85 & 0.15 \\ 0.45 & 0.55 \end{pmatrix} = (\ 0.69 \quad 0.31\ )$ $\quad \begin{cases} N_A = 1725 \\ N_B = 775 \end{cases}$

Coloriage d'un graphe

Exercice 24

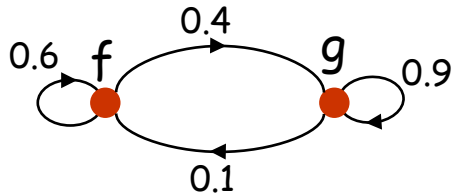
- On a divisé une population en deux catégories : «fumeurs» et «non-fumeurs». Une étude statistique a permis de constater que, d'une génération à l'autre,
  - 60% des descendants de fumeurs sont des fumeurs,
  - 10% des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.

On suppose que le taux de fécondité des fumeurs est le même que celui des non fumeurs. On désigne par :

- f_n le pourcentage de fumeurs à la génération de rang n,
- $g_n = 1 - f_n$ le pourcentage de non-fumeurs à la génération de rang n, où n est un entier naturel.

On considère qu'à la génération 0, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs. On a donc

1) Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.



Coloriage d'un graphe

Exercice 24

2) Justifier l'égalité matricielle :

$(f_{n+1} ; g_{n+1}) = (f_n ; g_n) \times A$ où A désigne la matrice: $\begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$

↳ D'après le graphe probabiliste présenté en 1), on a:

$$f_{n+1} = 0.6\, f_n + 0.1\, g_n \quad \text{et} \quad g_{n+1} = 0.4\, f_n + 0.9\, g_n.$$

En utilisant la notation matricielle, on aura:

$$(f_{n+1}\ g_{n+1}) = (f_n\ g_n) \times \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad (f_{n+1} ; g_{n+1}) = (f_n ; g_n) \times A$$

3) Déterminer le pourcentage de fumeurs à la génération de rang 2.

$$P_2 = P_0 \times M^2 = (0.5 \quad 0.5) \times \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.15 & 0.85 \end{pmatrix} = (0.275 \quad 0.725)$$

le pourcentage de fumeurs à la génération de rang 2 est égal à: 27.5%.

Coloriage d'un graphe

Exercice 24

4) Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.

- l'état probabiliste stable est tel que: $(f_n ; g_n) = (f_n ; g_n) \times A$

  On a donc: $f_n = 0.6\, f_n + 0.1\, g_n$ et $g_n + f_n = 1$

  $0.4\, f_n = 0.1\, g_n = 0.1\,(1 - f_n)$ $\quad 0.5\, f_n = 0.1$ $\quad f_n = 0.2$ et $g_n = 0.8$

  $$P_{stable} = (0.2 \quad 0.8)$$

5) Montrer que : pour tout entier naturel n, $f_{n+1} = 0.5\, f_n + 0.1$

- D'après le graphe probabiliste présenté en 1), on a:

  $f_{n+1} = 0.6\, f_n + 0.1\, g_n \qquad \forall\, n \in IN$

  $f_{n+1} = 0.6\, f_n + 0.1\,(1 - f_n) = 0.5\, f_{n+1} + 0.1$

Coloriage d'un graphe

Exercice 24

6) On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = f_n - 0.2$

a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

Premier terme: $u_0 = f_0 - 0.2 = 0.5 - 0.2 = 0.3$

$u_{n+1} = f_{n+1} - 0.2 = 0.5\, f_n + 0.1 - 0.2 = 0.5\,(f_n - 0.2) = 0.5\, u_n.$ $\forall\, n \in IN$

u_n est une suite géométrique de raison r=0.5 et de premier terme u_0=0.3

b) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

$u_n = u_0 - (r)^{\text{nombre de terme}} = 0.3 \times (0.5)^n$ $\forall\, n \in IN$

Coloriage d'un graphe

Exercice 24

c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $f_n = 0.3 \times 0.5^n + 0.2$

- On a $u_n = f_n - 0.2$ donc $f_n = u_n + 0.2 = 0.3 \times (0.5)^n + 0.2$

d) Déterminer la limite de la suite f_n lorsque n tend vers $+\infty$ et l'interpréter.

- $\lim_{n \infty} f_n = \lim_{n \infty} 0.3 \times (0.5)^n + 0.2 = 0.2$

Le pourcentage de fumeur à la génération convergera vers 0.2 quelle que soient les conditions de départ.

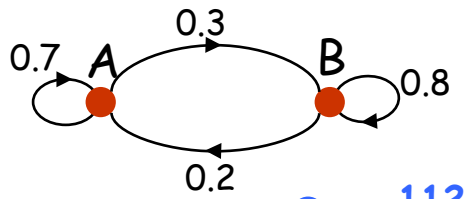
Coloriage d'un graphe

Exercice 25

- Au cours de la première semaine de l'année scolaire, un professeur propose aux élèves de sa classe le choix entre deux sorties pédagogiques une sortie A et une sortie B.
  20% des élèves de la classe sont favorables à la sortie A et tous les autres élèves sont favorables à la sortie B.
  Les arguments des uns et des autres font évoluer cette répartition en cours d'année. Ainsi 30 % des élèves favorables à la sortie A et 20 % des élèves favorables à la sortie B changent d'avis la semaine suivante.
  On note :
  a_n la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la semaine n ;
  b_n la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie B la semaine n ;
  P_n la matrice $(a_n \; b_n)$ traduisant l'état probabiliste la semaine n.

1) Déterminer l'état initial P_1. ➪ $P_1 = (\,0.2 \quad 0.8\,)$

2) Représenter la situation par un graphe probabiliste.



Coloriage d'un graphe

Exercice 25

3) En déduire que $P_{n+1} = P_n \times M$ où M est la matrice $\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$

Si a_1 et b_1 représentent respectivement la proportion des élèves favorables à le sortie A et B, la proportion des élèves favorables à la sortie A et B à la 2ème semaine sont respectivement: $a_2 = 0.7\ a_1 + 0.2\ b_1$ et $b_2 = 0.3\ a_1 + 0.8\ b_1$.

En utilisant la notation matricielle, si on note $(a_1\ b_1)$ les deux probabilités de la 1ère semaine et $(a_1\ b_1)$ celles de la 2ème semaine, on aura:

$$(a_2\ b_2) = (a_1\ b_1) \times \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$P_2 = P_1 \times M$, $P_3 = P_2 \times M$,..., etc ... et de manière générale $P_{n+1} = P_n \times M$.

Coloriage d'un graphe

Exercice 25

4) Déterminer l'état probabiliste P_3 et en déduire la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la troisième semaine.

$P_{n+1} = P_n \times M$ donc $P_2 = P_1 \times M$ puis $P_3 = P_2 \times M = P_1 \times M \times M = P_1 \times M^2$

$$P_3 = P_1 \times M^2 = (0.2 \quad 0.8) \times \begin{pmatrix} 0.55 & 0.45 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = (0.35 \quad 0.65)$$

La probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la troisième semaine est égale à 0.35.

5) Déterminer le réel x tel que $(x;\ 1-x) \,.\, M = (x;\ 1-x)$

$P_n \times M = P_{n+1}$ $\quad (a_n\ ;\ b_n) \times M = (a_{n+1}\ ;\ b_{n+1})$ $\quad (a_n\ ;\ 1 - a_n) \times M = (a_{n+1}\ ;\ 1 - a_{n+1})$

$x = a_n$ tel que $a_n = a_{n+1}$ $\quad a_n = 0.7\, a_n + 0.2\, b_n$ $\quad 0.3\, a_n = 0.2\,(1-a_n)$ $\quad a_n = 0.4$

$x = 0.4$

Coloriage d'un graphe

Exercice 25

5) On admet que la suite (a_n) est croissante. La sortie A finira-t-elle par être préférée à la sortie B ?

La suite (a_n) est croissante et majore par 1 donc elle admet une limite finie l.

$$a_{n+1} = 0.7\, a_n + 0.2\, b_n = 0.7\, a_n + 0.2\,(1 - a_n) = 0.5\, a_n + 0.2$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} a_{n+1} \quad \text{donc} \quad l = 0.5 \times l + 0.2 \qquad l = 0.4$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.4$$

La sortie A ne sera pas préférée à la sortie B

Coloriage d'un graphe

Exercice 26

- On s'intéresse aux performances réalisées par des étudiants courant le 200 mètres dans les compétitions universitaires. Lors d'une compétition, le score d'un(e) étudiant (e) est son meilleur temps en secondes obtenu aux 200 m. Une enquête a permis d'établir le comportement général suivant, qu'on supposera valable pour les filles et les garçons dans toute la suite :

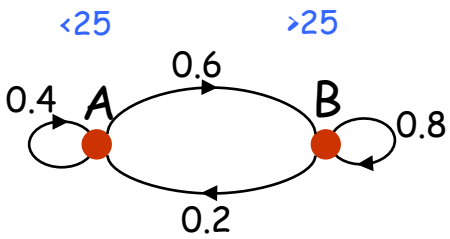
  - Lors de la première compétition, le score d'un(e) étudiant(e) est toujours supérieur ou égal à 25 secondes.
  - Si, lors de la $n^{ième}$ compétition, l'étudiant(e) a réalisé un score strictement <u>inférieur</u> à 25 secondes, la probabilité qu'il (elle) réalise encore un score strictement <u>inférieur</u> à 25 secondes lors de la $(n+1)^{ième}$ compétition est de 2/5.
  - Si, lors de la $n^{ième}$ compétition, l'étudiant(e) a réalisé un score <u>supérieur</u> ou égal à 25 secondes, la probabilité qu'il (elle) réalise encore un score strictement <u>inférieur</u> à 25 secondes est 1/5.

Coloriage d'un graphe

Exercice 26

- On représente les données précédentes par un graphe probabiliste G à deux états. On note A tout score strictement inférieur à 25 secondes et B tout score supérieur ou égal à 25 secondes.
  On note a_n la probabilité d'obtenir un score A lors de la compétition n et b_n la probabilité d'obtenir un score B lors de la compétition n.
  L'état probabiliste lors de la compétition n est donc représenté par la matrice ligne $(a_n\ b_n)$.

1) Représenter G et donner sa matrice de transition.



$$M = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Coloriage d'un graphe

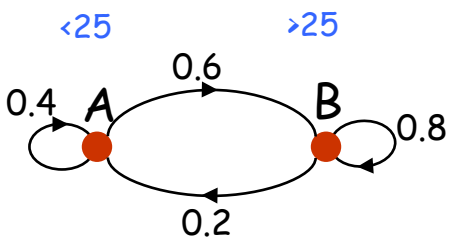
Exercice 26

2) Mouna, jeune étudiante, se présente à sa première compétition universitaire.

a) Calculer la probabilité qu'elle réalise un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres lors de cette compétition.

Lors de la première compétition, le score d'un(e) étudiant(e) est toujours supérieur ou égal à 25 secondes; $a_1 = 0$ donc $P = 0$

b) Calculer la probabilité qu'elle réalise un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres lors de sa troisième compétition.



$a_3 = ?$ $a_{n+1} = 0.4\, a_n + 0.2\, b_n$ et $b_{n+1} = 0.6\, a_n + 0.8\, b_n$

$a_3 = 0.4\, a_2 + 0.2\, b_2 = 0.4\,(0.4\, a_1 + 0.2\, b_1) + 0.2\, b_2$

$= 0.4 + 0.08 + 0.2\,(0.6\, a_1 + 0.8\, b_1) = 0.48 + 0.12$

$a_3 = 0.6$

Coloriage d'un graphe

Exercice 26

3) Déterminer l'état stable du graphe G.

$a_{n+1} = 0.4\, a_n + 0.2\, b_n \qquad b_{n+1} = 0.6\, a_n + 0.8\, b_n$

$a_{n+1} = a_n \qquad a_n = 0.4\, a_n + 0.2\, b_n \qquad 0.6\, a_n = 0.2\, b_n \qquad a_n = \frac{b_n}{3}$

$$\begin{cases} a_n = \frac{b_n}{3} \\ a_n + b_n = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_n = 0.25 \\ b_n = 0.75 \end{cases}$$

4) Riadh a déjà de nombreuses compétitions universitaires.
Montrer que, pour sa prochaine compétition, il a environ une chance sur quatre de réaliser un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres.

Il s'agit de chercher la limite de a_n quand n tend vers l'infini.

$a_{n+1} = 0.4\, a_n + 0.2\, b_n = 0.4\, a_n + 0.2\,(1 - a_n) = 0.2\, a_n + 0.2$ donc $\lim_{n \to \infty} a_n = 0.25$

Coloriage d'un graphe

Exercice 27

- Étude de l'évolution météorologique d'un jour à l'autre dans une localité. Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions rationnelles.

Partie A

× S'il fait sec aujourd'hui, alors il fera encore sec demain avec la probabilité 5/6, donc il fera humide demain avec la probabilité 1/6.
× S'il fait humide aujourd'hui, alors il fera encore humide demain avec la probabilité 2/3.

Nous sommes dimanche et il fait sec. On s'intéresse à l'évolution météorologique des jours suivants.

Coloriage d'un graphe

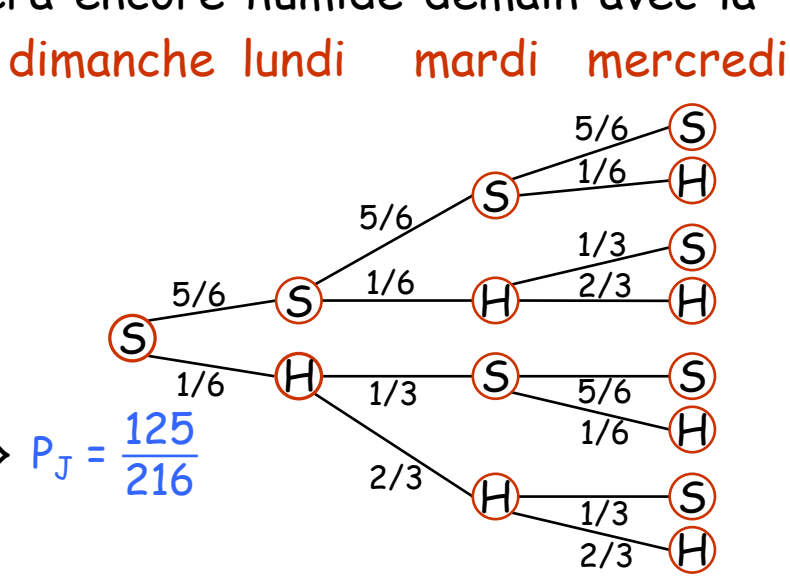
Exercice 27

Partie A

× S'il fait sec aujourd'hui, alors il fera encore sec demain avec la probabilité 5/6, donc il fera humide demain avec la probabilité 1/6.
× S'il fait humide aujourd'hui, alors il fera encore humide demain avec la probabilité 2/3.

1) Construire un arbre de probabilité représentant la situation de dimanche à mercredi.

2) En déduire la probabilité des évènements suivants :



J: « il fera sec lundi, mardi et mercredi » $P_J = \frac{125}{216}$

K: « il fera sec mardi » ; $P_J = \frac{3}{4}$

L: « il fera humide mercredi ».

$$P_L = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{41}{108}$$

Coloriage d'un graphe

Exercice 27

Partie B

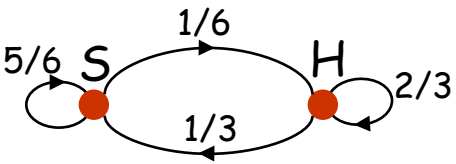
1) Soit n un entier naturel, on note :
s_n la probabilité pour que le jour n, il fasse sec ;
h_n la probabilité pour que le jour n, il fasse humide ;
P_n la matrice $(s_n \quad h_n)$ traduisant l'état probabiliste du temps le jour n.
Déterminer une relation entre s_n et h_n.

$s_n + h_n = 1$

2) a) Si le premier dimanche est le jour correspondant à n = 0, donner la matrice associée à l'état initial du temps.

Au premier dimanche il fait sec donc $P_0 = (1 \quad 0)$

b) Décrire l'évolution de cet état à l'aide d'un graphe probabiliste.



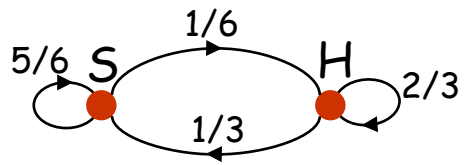
Coloriage d'un graphe

Exercice 27

Partie B

3) La matrice M de ce graphe est:

$$M = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$



a) Déterminer M^2

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) Expliquer comment retrouver à l'aide de la matrice M, la situation du mardi étudiée dans la partie A.

$P_{n+1} = P_n \times M$ donc $P_1 = P_0 \times M$ puis $P_2 = P_1 \times M = P_0 \times M \times M = P_0 \times M^2$

2) a) Déterminer l'état stable associé à l'évolution météorologique.

$h_{n+1} = \frac{2}{3} h_n + \frac{1}{6} s_n$ $\qquad$ $h_{n+1} = \frac{2}{3} h_n + \frac{1}{6}(1 - h_n) = \frac{1}{2} h_n + \frac{1}{6}$

$P_n = P_{n+1}$ $\qquad$ $h_n = h_{n+1}$ $\qquad$ $h_n = \frac{1}{2} h_n + \frac{1}{6}$ $\qquad$ $h_n = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $P_{stable} = \left(\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}\right)$

Coloriage d'un graphe

Exercice 27

Partie B

b) En déduire, qu'à long terme, la probabilité qu'il pleuve un certain jour est 1/3.

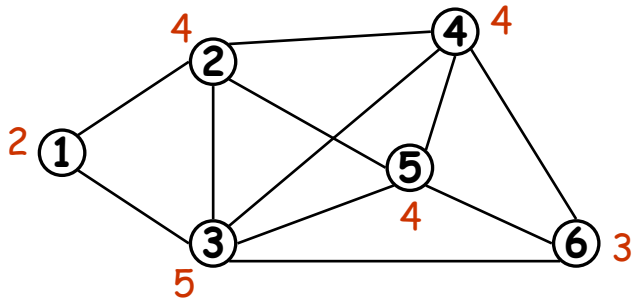
- Il s'agit de chercher la limite de h_n quand n tend vers l'infini.

Or $h_{n+1} = \frac{1}{2} h_n + \frac{1}{6}$ donc $\lim_{n \to \infty} h_n = \frac{1}{3}$

4ème année Sciences de l'informatique

Coloriage d'un graphe

Exercice 1



On considère le graphe ci-dessous

QCM

Trouver toutes les bonnes réponses.

a) La somme des degrés des sommets est:

☐ 20 ☐ 21 ☒ 22

b) Le nombre de sous-graphe complets d'ordre 3 est:

☒ 8 ☐ 9 ☐ 10

c) Un sous-graphes stable est:

☐ {1; 4; 6} ☒ {1; 6} ☒ {2; 6}

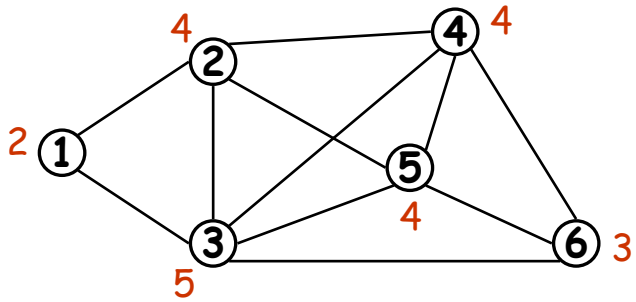
Def: Un stable est un sous-ensemble de sommets deux à deux non adjacents.

b) Entre les sommets 1 et 6, il existe une chaîne de longueur:

☒ 5 ☒ 11 ☒ 8

Associer un graphe à une situation

Exercice 1



On considère le graphe ci-dessous

Vrai ou Faux

Corriger si c'est faux.

a) L'ordre du graphe est le degré maximal de ses sommets. FAUX

- L'ordre d'un graphe est le nombre de ses sommets.

b) Le nombre d'arêtes est égal au double de la somme des degrés des sommets du graphe. FAUX

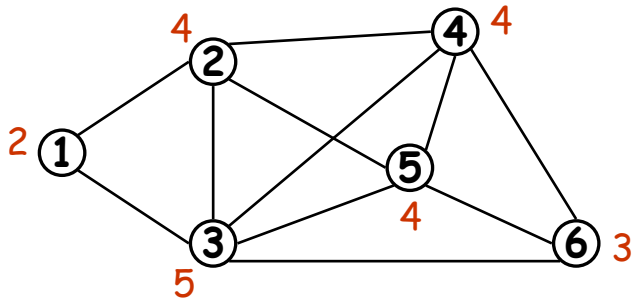
- C'est la moitié de la somme des degrés des sommets.

c) Le graphe contient un sous graphe complet d'ordre 5. FAUX

- Le graphe contient un sous graphe complet d'ordre 4.

Associer un graphe à une situation

Exercice 1



On considère le graphe ci-dessous

Vrai ou Faux

Corriger si c'est faux.

d) On peut colorier le graphe avec 5 couleurs. VRAI

e) Le graphe contient un sous-graphe complet d'ordre 4, donc le nombre chromatique est égal à 4. FAUX

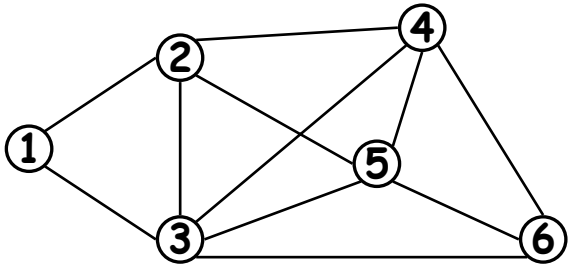
↳ Le nombre chromatique est donc supérieur ou égal à 4.

b) Il est possible de parcourir toutes les arêtes du graphe en passant, une fois et une seule, par chaque arête. VRAI

↳ C'est la moitié de la somme des degrés des sommets.

Associer un graphe à une situation

Exercice 1



On considère le graphe ci-dessous

Vrai ou Faux

Corriger si c'est faux.

g) Il existe toujours une chaîne de longueur 2 entre deux sommets quelconques du graphe. VRAI

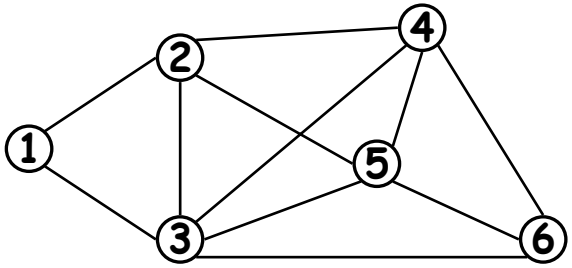
- Il suffit de chercher M^2 avec M est la matrice associée à ce graphe.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Pas de 0 dans la matrice M^2 donc la proposition est vrai

Associer un graphe à une situation

Exercice 1



On considère le graphe ci-dessous

Vrai ou Faux

Corriger si c'est faux.

h) Il existe 48 chaînes de longueur 4 entre les sommets 1 et 5. FAUX

- Il suffit de chercher M^4 avec M est la matrice associée à ce graphe.

$$M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 24 & 25 & 25 & 18 \\ 20 & 43 & 46 & 39 & 39 & 36 \\ 24 & 46 & 57 & 48 & 48 & 38 \\ 25 & 39 & 48 & 46 & 45 & 34 \\ 25 & 39 & 48 & 45 & 46 & 34 \\ 18 & 36 & 38 & 34 & 34 & 31 \end{pmatrix}$$

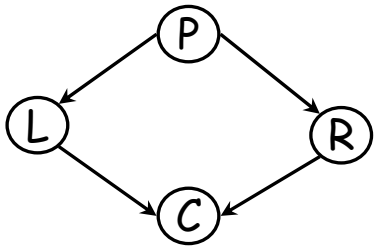
- Il existe 25 chaînes de longueur 4 entre les sommets 1 et 5.

Associer un graphe à une situation

Exercice 2

- -Tous les carrés sont des rectangles.
  -Tous les carrés sont des losanges.
  -Tous les rectangles sont des parallélogrammes.
  -Tous les losanges sont des parallélogrammes.

Illustrer ces 4 théorèmes par un graphe; comment interpréter les chaînes de longueur 2.



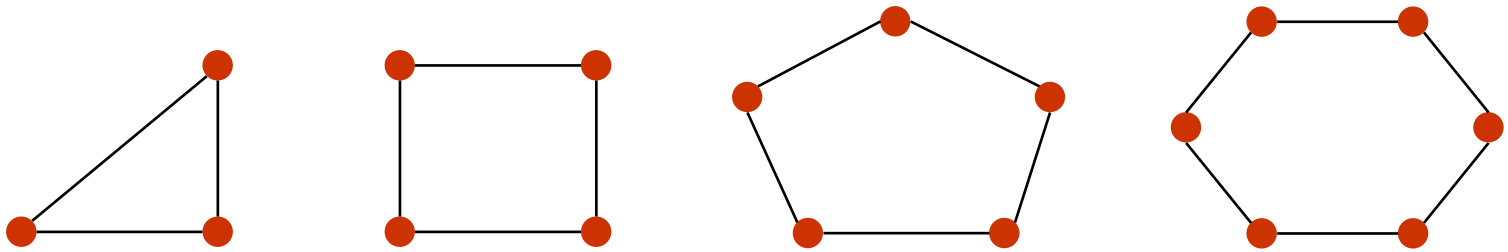
Les chaînes de longueur 2 illustrent deux méthodes pour montrer qu'un parallélogramme est un carré Rectangle puis carré ou losange puis carré.

Associer un graphe à une situation

Exercice 3

Exercice 6 de la 3ème année Économie et Gestion

- Dessiner les graphes d'ordre 3, 4, 5, 6 dont tous les sommets sont de degré 2.



n = 3 n = 4 n = 5 n = 6

Associer un graphe à une situation

Exercice 4

- a) Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe simple à n sommets?

  - C'est le nombre d'arêtes dans un graphe complet K. le nombre d'arêtes est égal à $\frac{n(n-1)}{2}$

b) Quel est le degré maximal d'un graphe simple à n sommets?

- le degré maximal d'un graphe simple à n sommets est égal à n-1.

Associer un graphe à une situation

Exercice 5

- On considère le polyèdre de l'espace. Montrer que ce polyèdre possède au moins deux faces qui on le même nombre d'arêtes.

On peut modéliser le polyèdre par un graphe tel que chaque sommet représente une face du polyèdre. Deux sommets sont adjacents si les deux faces ont une arête en commun.

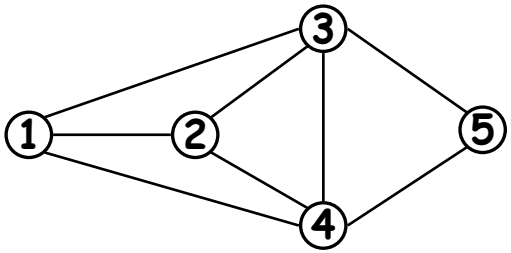
Le nombre d'arête d'une face du polyèdre serait alors le degré du sommet la représentant. Sachant que dans graphe d'ordre supérieur ou égal à 2, il existe toujours deux sommets ayant le même nombre d'arêtes, donc il existe nécessairement deux face du polyèdre ayant le même nombre d'arêtes.

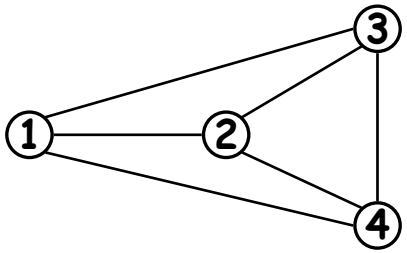
Associer un graphe à une situation

Exercice 6

- Un facteur désire faire sa tournée sans passer deux fois dans la même rue. Est-ce possible si sa tournée a les profils suivants?

  - Il s'agit de vérifier l'existence d'une chaîne eulérienne.





- Il y a exactement deux sommets de degré impaire donc la tournée est possible si le facteur ne doit pas retourner au point de départ.

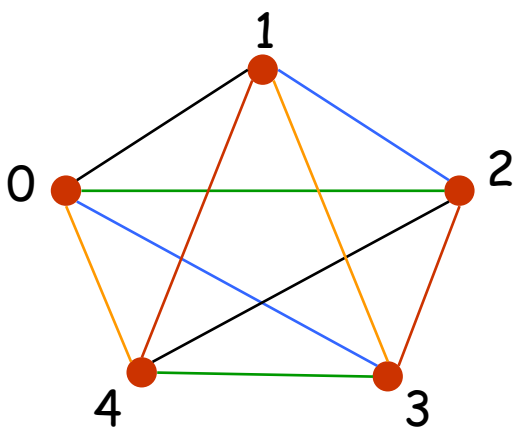
- Il y a quatre sommets de degré impaire donc la tournée n'est pas possible.

Associer un graphe à une situation

Exercice 7

- Une ligue de football comporte 5 équipes.

a) Il est décidé par le bureau de la ligue que lors d'un week-end d'entraînement, chaque équipe jouera quatre matches (deux équipes ne peuvent pas se rencontrer plus d'une fois). Comment l'organiser?



- On peut modéliser la situation par un graphe tel que chaque sommet représente une équipe. Chaque arête représente une rencontre entre les équipes représentées par les sommets. Les sommets sont donc tous de degré 4.

- Deux arêtes de même couleur représentent deux matches pouvant être joués en même temps.

Associer un graphe à une situation

Exercice 7

b) Le calendrier étant trop chargé, les organisateurs décident que chaque équipe ne jouera que trois matches. Comment l'organiser ?

- De même, il s'agit de modéliser la situation par un graphe tel que chaque sommet représente une équipe. Chaque arête représente une rencontre entre les équipes représentées par les sommets. Les sommets sont donc tous de degré 3 et il en a 5.

- Impossible car la somme des degrés des sommets sera égale à:

$$5 \times 3 = 15 \text{ impair !!!}$$

Associer un graphe à une situation

Exercice 8

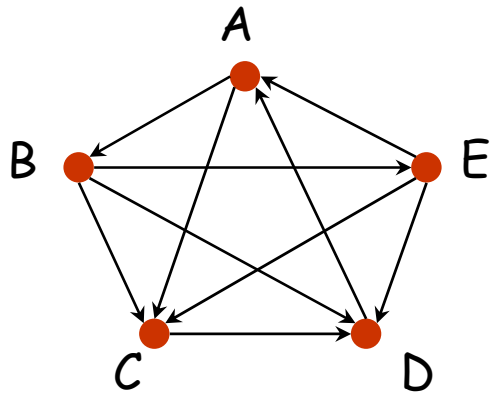
- Un tournoi de foot se joue entre cinq équipes A, B, C, D et E. Chaque équipe rencontre une et une seule fois chacune des autres. Les résultats sont les suivants :

a battu	A A B B B	a battu	B C C D E
	C D E E E		D A A C D

L'objectif est d'établir un classement des équipes.

1) Traduire ces résultats à l'aide d'un graphe.

2) Traduire ce graphe à l'aide d'une matrice M



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Associer un graphe à une situation

Exercice 8

3) Calculer M^2 ; interpréter cette matrice.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Calculer $S = M + M^2$; en déduire un classement des cinq équipes.

$$S = M + M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Associer un graphe à une situation

Exercice 9

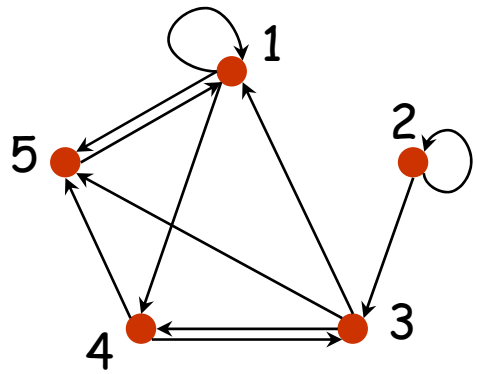
On considère le graphe dont la matrice est:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Ce graphe est-il orienté? Pourquoi?

- Ce graphe est orienté car la matrice associée n'est pas symétrique.

b) Dessiner ce graphe de sommets 1, 2, 3, 4 et 5.



c) Combien y a-t-il de chaînes de longueur 5, allant du sommet 5 vers le sommet 3? Les citer.

$$M^5 = \begin{pmatrix} 22 & 0 & 6 & 13 & 19 \\ 18 & 1 & 6 & 11 & 16 \\ 22 & 0 & 6 & 13 & 19 \\ 15 & 0 & 4 & 9 & 13 \\ 10 & 0 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

- Il y a 3 chaînes de longueur 5 allant du sommet 5 vers le sommet 3

× 5 - 1 - 5 - 1 - 4 - 3 × 5 - 1 - 1 - 1 - 4 - 3 × 5 - 1 - 4 - 3 - 4 - 3

Associer un graphe à une situation

Exercice 10

1) Pour un graphe d'ordre n de matrice associée M, comment interpréter $\sum_{j=1}^{n} m_{ij}$

- C'est le degré du sommet i.

Quel est le calcul équivalent pour un graphe orienté?

- C'est le nombre d'arcs issus du sommet i.

2) Interpréter $tr(M^2)$, où tr désigne la trace de la matrice M.

Def: La trace d'une matrice est la somme de ses éléments sur la diagonale.

- $tr(M^2)$ est le nombre de cycles de longueur 2.

3) On sait que $tr(M^3) \neq 0$. Montrer que le nombre chromatique du graphe est supérieur ou égal à 3.

- $tr(M^3) \neq 0$ donc il existe au moins un cycle de longueur 3 (impair). D'où le nombre chromatique du graphe est supérieur ou égal à 3.

Associer un graphe à une situation

Exercice 11

Exercice 29 de la 3ème année Économie et Gestion

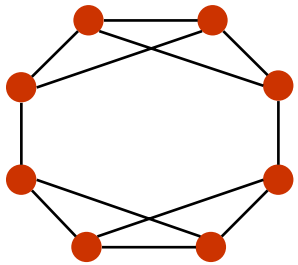
- M. et Mme Euler assistent à une réunion. Il y a trois autres couples dans l'assistance et plusieurs poignées de mains sont échangées. Personne ne serre sa propre main et les époux ne se serrent pas la main. Deux personnes quelconques de l'assemblée se serrent la main au plus une fois. M. X constate que les 7 autres personnes ont échangé des poignées de mains en nombres tous distincts.

  Combien de poignées de mains M. et Mme Euler ont-ils échangé avec les autres membres de la réunion ?

Associer un graphe à une situation

Exercice 12

- Existe-t-il un graphe simple à 8 sommets dont tous les sommets sont de degré 3?



- Pour quels entiers n ≥ 2 le graphe complet à n sommets a-t-il un cycle eulérien?

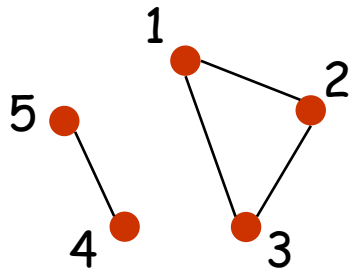
  ↳ Un graphe admet une cycle eulérien ssi il n'admet aucun sommet de degré impair. Le degré d'un sommet quelconque dans graphe complet d'ordre n est égal à n-1. Donc il suffit que n soit impaire pour que le graphe complet admet une cycle eulérien.

Associer un graphe à une situation

Exercice 13

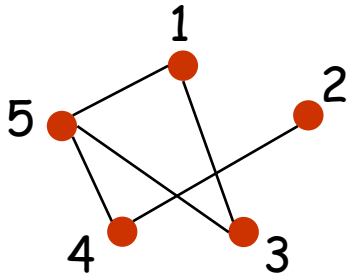
- Dans chaque cas dessiner le graphe associé à la matrice. Est-il connexe? Si oui, existe-il une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Graphe non connexe

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

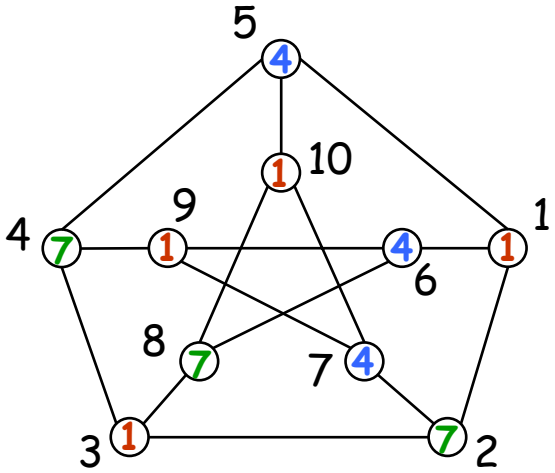


Graphe connexe ayant une chaîne eulérienne mais pas une cycle eulérien.

Associer un graphe à une situation

Exercice 14

- On chercher à colorer le graphe ci-dessous en utilisant des entiers positifs de façon telle que deux sommets voisins ont des couleurs dont la différence, en valeur absolue, est au moins égale à trois.



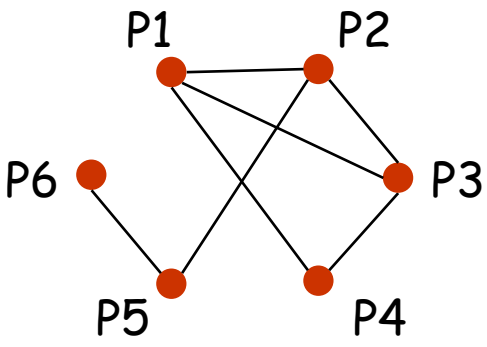
↳ 7 est le plus grand entier utilisé. On ne peut pas faire mieux car le nombre chromatique de ce graphe est supérieur ou égale à 3. En Effet, le graphe contient un cycle (1-2-3-4-5) de longueur impaire égale à 5.

Proposer une coloration de ce graphe. Quel est le plus grand entier utilisé? Peut-on faire mieux?

Associer un graphe à une situation

Exercice 16

- Une entreprise qui fabrique six sortes de produits chimiques différents (notés P1, P2, P3, P4, P5, P6) doit en assurer le transport par train. Ces produits sont en petite quantité mais ne peuvent être tous placés dans le même wagon pour des raisons de sécurité. Plus précisément; P1 ne peut être transporté avec P2, P3 ou P4. P2 ne peut être transporté avec P3 ou P5. P3 ne peut être transporté avec P4. P5 ne peut être transporté avec P6. Combien de wagons sont-ils nécessaires au transport des six produits?

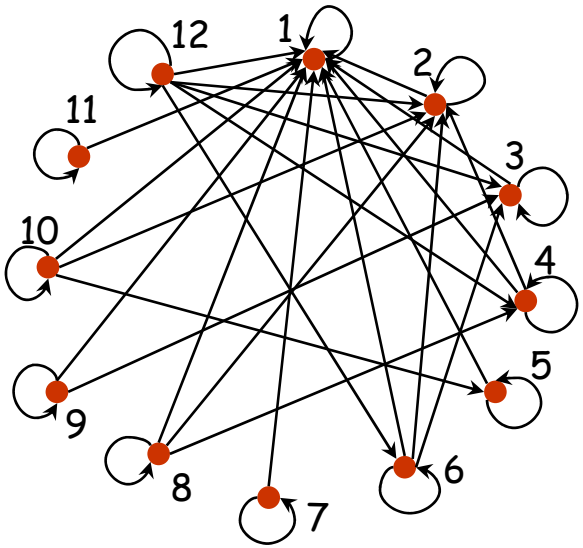


- On peut modéliser la situation à l'aide d'un graphe ou chaque sommet représente un produit chimique. Deux sommets sont reliés si les deux produits chimiques correspondants ne peuvent pas être transportés ensemble.
- Le nombre de wagons est le nombre chromatique du graphe: 3 wagons.

Associer un graphe à une situation

Exercice 17

- Construire un graphe orienté dont les sommets sont les entiers compris entre 1 et 12 et dont les arcs représentent la relation « être diviseur de ».



Associer un graphe à une situation

Exercice 22

Exercice 27 de la 4ème année Économie et Gestion