Corrigés des exercices du chapitre15 : les graphes
Section : 4eme informatique
DREF Tunis **Discipline : Mathématiques** **Année scolaire 2007/2008**

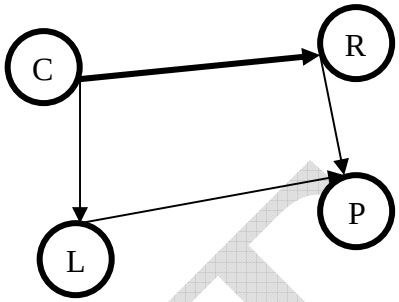
Exercice 1

□ :22 □ :8 □ : $\{1;6\} \setminus \{2;6\}$ □ : 5 – 8 – 11.

Vrai ou faux :

a) faux : l'ordre d'un graphe est le nombre de ses sommets.
b) Vrai
c) Faux : car dans ce cas chacun des 5 sommets doit être de degré 4 mais dans ce graphe il y a seulement 4 qui sont de degré 4.
d) vrai : les sommets de même couleur sont : $\{1;6\}$ - $\{2\}$ - $\{3\}$ - $\{4\}$ - $\{5\}$.
e) Faux : $\gamma(G) \geq 4$.
f) Vrai : c'est la chaîne d'extrémités les sommets 3 et 6.
g) Vrai.
h) Faux : Soit M la matrice associée à ce graphe, dans M^4 on a : $a_{15} = a_{51} = 25$

Exercice 2 :



Chemin de longueur 2 : tout carré est un parallélogramme

Exercice 3

Les graphes sont supposés simples.
Si les graphes sont connexes alors ce sont des cycles d'ordres : 3 – 4 – 5 – 6.
Si les graphes ne sont pas connexes on aura un graphe d'ordre 6 formé de deux composantes connexes qui sont des triangles.

Exercice 4

a) le nombre maximal d'arête d'un graphe simple d'ordre n est $\frac{n(n-1)}{2}$.
b) Dans un graphe simple d'ordre n le degré maximal d'une arête est $n-1$.

Exercice 5

Modélisation :

- un sommet est une face.
- Arête : arête commune entre deux faces.

On suppose que le polyèdre est à n faces; donc on aura un graphe connexe d'ordre n dont le degré de chaque sommet est compris entre 1 et $(n-1)$. On note les sommets S_i de sorte que le degré de S_i est i avec $1 \leq i \leq n-1$.
Si les faces ont de nombres d'arêtes distincts deux à deux donc les sommets du graphes ont tous des degrés distincts deux à deux ; ce qui implique qu'il y a un sommet de degré 0 car $n \succ (n-1)$; le graphe est alors non connexe donc il y a une face du polyèdre qui n'a aucune arête commune avec les autres et c'est absurde.
Conclusion : il y a au moins deux faces ayant même nombre d'arête.

Exercice 6

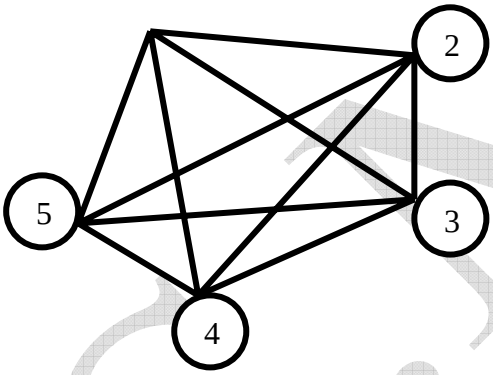
Il s'agit de trouver une chaîne eulérienne :

- Dans le premier graphe c'est possible car tous les sommets sont de degrés pairs sauf les sommets 1 et 2.
- Dans le deuxième cas ce n'est pas possible.

Exercice7

a/ Modélisation :

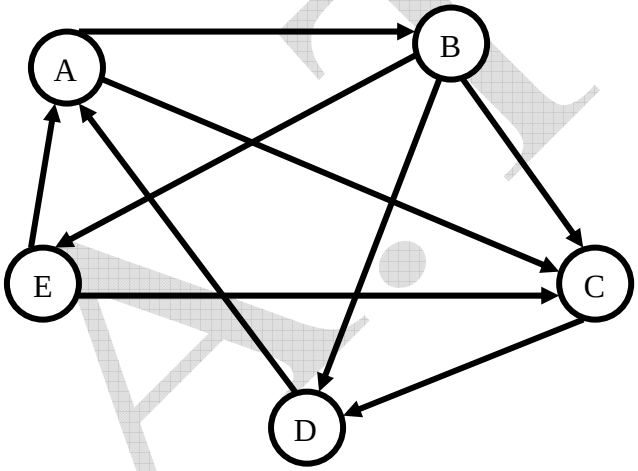
- les sommets sont les équipes
- arête : un match.



C'est un graphe complet ; une possibilité d'organisation est : $\{(1,2);(3,4)\}$ - $\{(1,3);(2,5)\}$ - $\{(1,4);(3,5)\}$ - $\{(1,5);(2,4)\}$ - $\{(2,3);(4,5)\}$.

b/ l'organisation est impossible car on a cinq sommet de degrés impairs.

Exercice 8



2) La matrice associée à ce graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Chaque terme a_{ij} de M^2 donne le nombre de chemin de longueur 2 allant du sommet i vers le sommet j.

4) a/ $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Chaque terme a_{ij} de S est le nombre de chemin de longueur **au plus** 2 allant du sommet i au sommet j.

Un chemin de longueur au plus 2 de l'équipe i vers l'équipe j signifie que i a gagné une équipe k et cette Dernière a gagné j.

b/ Un classement possible des équipes (en tenant des gains)

Equipes	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
$\sum_{j=1}^{5} a_{ij}$ dans S	**6**	**8**	**2**	**3**	**7**

Ce classement est alors : B – E – A – C – D.

Exercice 9

a) ce graphe est orienté car sa matrice associée n'est pas symétrique.

c) $M^5 = \begin{pmatrix} 22 & 0 & 6 & 13 & 19 \\ 18 & 1 & 6 & 11 & 16 \\ 22 & 0 & 6 & 13 & 19 \\ 15 & 0 & 4 & 9 & 13 \\ 10 & 0 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

dans M^5 on $a_{53} = 3$ donc le nombre de chemin de longueur 5 allant de du sommet 5 vers le sommet 3 est égal à 3. les chemins sont: $(5-1-4-3-4-3)$; $(5-1-5-1-4-3)$; $(5-1-1-1-4-3)$.

Exercice 10

On suppose que le graphe est simple (sans boucle).

1) a/ $\sum_{j=1}^{n} m_{ij}$ est le nombre d'arêtes incidentes au sommet i : le degré du sommet i.

b/ $\sum_{j=1}^{n} m_{ij}$ est le nombre d'arc sortant du sommet i.

2) $tr(M^2)$ est le nombre de cycles de longueur 2.

3) $tr(M^3) \neq 0$ signifie qu'il y a au moins un cycle de longueur 3 qui est coloriable par 3 couleurs alors $\gamma(G) \geq 3$

Exercice 11

On désigne par les sommets x_i $0 \le i \le 6$ les personnes qui ont serrés les mains.
Chaque sommet x est tel que : $0 \le d(x) \le 6$; on pose $d(x_i) = i$

Le sommet x_6 tel que $d(x_6) = 6$, ne peut pas être madame Euler si non il n y aura pas un sommet de degré 0.
Alors le conjoint de x_6 est nécessairement de degré 0, car il ne serre pas la main de son conjoint.
Le sommet de degré 5 ne peut pas être madame Euler et son conjoint doit être de degré 1 si non il n y aura pas de sommet de degré 1.

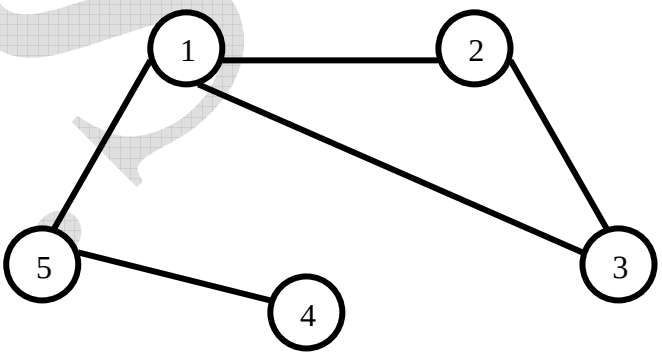
Le sommet de degré 4 ne peut pas être madame Euler en plus son conjoint est de degré 2 si non il n y aura pas un sommet de degré 2.
En fin c'est M et Mme Euler qui sont de degré 3.

Exercice 12

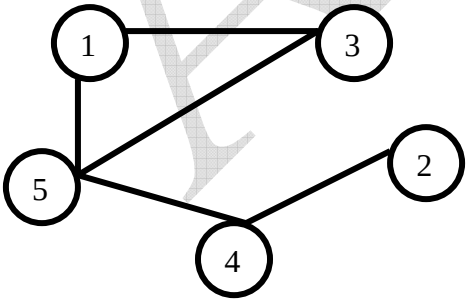
1) Il existe un graphe simple d'ordre 8 dont les sommets sont tous de degré 3 : c'est un graphe cubique.
2) Le degré de chaque sommet d'un graphe complet d'ordre n $(n \ge 2)$ est (n-1), ce graphe a un cycle eulérien si le degré de chaque sommet est pair alors (n-1) est paire par suite n est impair.

Exercice 13

Graphe A :
La matrice A est symétrique il s'agit d'un graphe
Non orienté.
Le graphe est connexe; il existe une chaîne eulérienne
D'extrémités 1 et 4.



Graphe B :
La matrice B est symétrique il s'agit d'un graphe non orienté.
Le graphe est connexe; il existe une chaîne eulérienne d'extrémités 2 et 5.



Exercice 14

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
couleur	0	3	0	3	6	3	0	0	6	3

Le plus grand entier utilisé est 6. on ne peut pas faire mieux car :

- le plus grand degré d'un sommet est : 3 alors $\gamma(g) \leq 4$.
- G contient un cycle impair (1-2-3-4-5) alors $\gamma(G) \geq 3$
- On déduit que $3 \leq \gamma(G) \leq 4$ comme on a pu colorer avec 3 couleurs alors $\gamma(G) = 3$.

Exercice 15

1) le graphe n'est pas complet car il est d'ordre le sommet A n'est pas adjacent à tous les autres sommets.
2) a/ En utilisant l'algorithme de welsh Powell, on obtient la coloration suivante :

sommet	B	C	D	E	G	A	F
Degré	4	4	4	4	3	2	2
Couleur	C1	C2	C4	C1	C2	C5	C4

b) on déduit que $\gamma(G) \leq 5$
3) a/ le plus grand degré est 4 de plus le sous graphe ABCD est complet d'ordre 4 alors $4 \leq \gamma(G) \leq 5$.
b/ des stables possibles de ce graphe sont : $\{A,G\}$ - $\{B,E\}$ - $\{C,F\}$ et $\{D\}$ donc on peut utiliser 4 couleurs par suite $\gamma(G) = 4$.
4) a/ la matrice associée à ce graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b/

$$M^8 = \begin{pmatrix} 3012 & 3560 & 3011 & 3704 & 3152 & 1614 & 2416 \\ 3425 & 4133 & 3425 & 4160 & 3667 & 1856 & 2690 \\ 3425 & 4005 & 3426 & 4287 & 3539 & 1856 & 2818 \\ 3425 & 4005 & 3425 & 4288 & 3539 & 1856 & 2818 \\ 1856 & 2258 & 1856 & 2243 & 2029 & 1031 & 1476 \\ 1076 & 1296 & 1076 & 1340 & 1166 & 618 & 896 \\ 1856 & 2130 & 1856 & 2376 & 1901 & 1031 & 1604 \end{pmatrix}$$

Il y a 4160 chaînes de longueur 8 qui relient B à D.

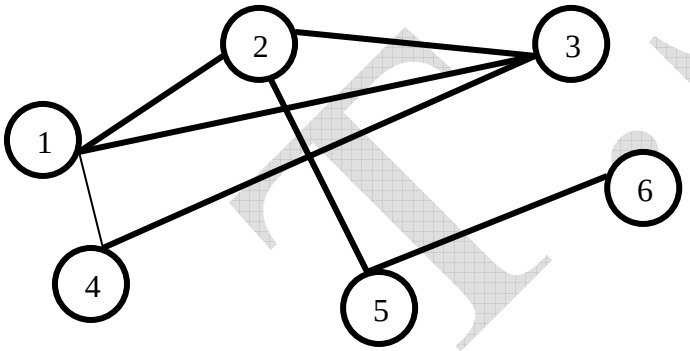
5) a/ Un itinéraire est une chaîne eulérienne et c'est possible c'est la chaîne d'extrémités A et G.
b/ c' est la liaison A-G.

Exercice 16

Le tableau suivant présente la relation d'incompatibilité des produits chimiques :

Produit	P1	P2	P3	P4	P5	P6
P1		*	*	*		
P2	*		*		*	
P3	*	*		*		
P4	*		*			
P5		*				*
P6					*	

Le graphe qui représente ce problème est :



Le nombre de wagon nécessaire au transport des six produits est le nombre chromatique de ce graphe.
Le plus grand degré existant est 3 (sommet 1) de plus ce graphe contient un sous graphe complet d'ordre 3
C'est (1 – 2 – 3); On déduit que : $3 \leq \gamma(g) \leq 4$.
En utilisant l'algorithme de welsh Powell on obtient :

Sommet	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Degré	**3**	**3**	**3**	**2**	**2**	**1**
Couleur	**C1**	**C2**	**C3**	**C2**	**C1**	**C2**

On peut déduire que le nombre chromatique est 3.
Conclusion : on a besoin de trois wagons pour transporter ces produits.

Exercice 18

Cet exercice utilise les graphes biparti !!!

Exercice 19

a) le graphe G est orienté car sa matrice associée M n'est pas symétrique.

b)

sommet	A	B	C	D
Degré	5	5	2	6

c) La colonne 3 ne contient que des zéro signifie que il n y a aucun chemin aboutissant au sommet C.

d) Dans M on a : $a_{24} = 1$ alors il y a un seul chemin allant de B vers D et $a_{42} = 0$ signifie qu'il n y a aucun chemin allant de D vers B.

Exercice 22

1) b/ $p(J) = (\frac{5}{6})^3 = \frac{125}{216}$

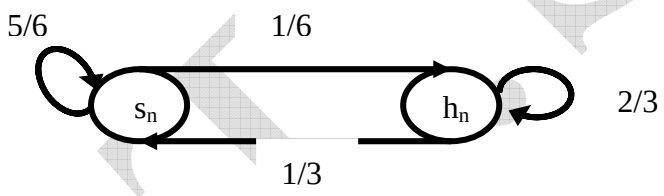
$p(K) = (\frac{5}{6})^2 + \frac{1}{6}.\frac{1}{3} = \frac{3}{4}$

$p(L) = \frac{1}{6}.(\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{6})^2.\frac{1}{3} + \frac{5}{6}.\frac{1}{6}.\frac{2}{3} + (\frac{5}{6})^2.\frac{1}{6} = \frac{47}{54}$.

2) a/ $S_n + h_n = 1$.

b/ a matrice ligne associée à l'état initiale du temps le jour de dimanche est: $(1;0)$.

c/ le graphe probabiliste décrivant l'évolution de l'état est :



3) a/ $M^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b/ La situation du mardi est décrit par la matrice ligne $(s_2, h_2) = (s_0, h_0).M^2 = (1,0).\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\frac{3}{4};\frac{1}{4})$

donc la probabilité qu'il fera sec Mardi est $\frac{3}{4}$.

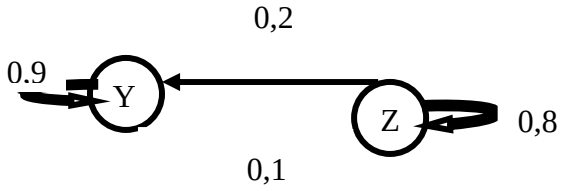
c/ La matrice ligne décrivant l'état stable est $P = (s, h)$ la solution de l'équation : $P = P.M$

Équivaut à : $\begin{cases} \frac{5}{6}s + \frac{1}{3}h = s \\ \frac{1}{6}s + \frac{2}{3}h = h \end{cases}$ avec $s + h = 1$

On trouve que $(s,h) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Donc la probabilité qu il pleut un certain jour est h $= \frac{1}{3}$.

Exercice 23

1) On désigne par : Y la situation des acheteurs de la marque Y
Et par Z la situation des acheteurs de tout marque autre que Y.
Le graphe probabiliste correspondant à cette situation :



2) a/ la matrice associé à ce graphe est : $A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

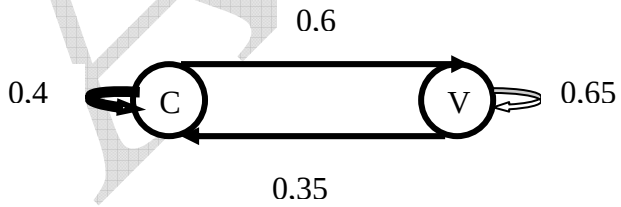
b/ La matrice ligne décrivant la situation après deux semaines est :

$(y_2, z_2) = (0,3; 0,7).\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}^2 = (0,487; 0,513)$ donc la probabilité pour qu'un acheteur choisit au hasard après deux semaines de la compagne publicitaire achète des yaourts de la marque Y est : 0,487.

4) La matrice ligne décrivant la situation après n semaines est :
$(y_n, z_n) = X_0.A^n$; Donc la probabilité pour qu'un acheteur choisit au hasard après n semaines de la compagne publicitaire achète des yaourts de la marque Y est : $y_n = \frac{2}{3} - \frac{11}{30}.(0,7)^n$. on a donc : $y_n \leq \frac{2}{3}$
Pour tout entier naturel n, par suite l'entreprise ne peut pas espérer atteindre une part du marché de 70%.

Exercice 24

1) Le graphe probabiliste qui modélise cette situation est :



2) La matrice ligne $P = (c, v)$ traduisant l'état probabiliste stable est la solution de l'équation : $P = P.M$ équivaut à :

$\begin{cases} 0,4c + 0,35v = c \\ 0,6c + c,65v = v \end{cases}$ Avec $c + v = 1$.

La solution de ce système est $P = (\frac{7}{19};\frac{12}{19})$

ce qui correspond à une répartition des habitants en $(70;120)$.

3) a/ il est facile de vérifier que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,05 et de premier terme -10.

b) Du fait que pour tout entier naturel on a : $u_n = (-10).(0,05)^n$ on déduit que $X_n = 70 - 10.(0,05)^n$.

c) Après une année le nombre d'habitants pratiquant le covoiturage est $X_1 = 70 - 10.(0,05) = 69,5$.
Ceci ne correspond pas à la moitié des habitants de cette région.

A.T.S.M