Solutions aux exercices sur la théorie des graphes

du manuel scolaire

3ème E-G

Exercice n°1 : Il suffit de comparer l'ordre des graphes puis le degré de chaque sommet.

Exercice n°2 :Un tel graphe est impossible à construire

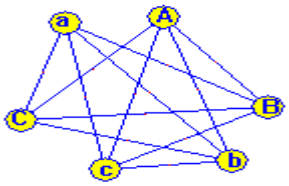
En effet il n'existe aucun graphe dont tous les sommets ont des degrés distincts. Car si un graphe existe et s'il possède n sommets. Le degré maximal d'un sommet de ce graphe est n-1. Si en plus tous les degrés des sommets de ce graphe sont distincts, on aurait nécessairement un sommet de degré 0, un sommet de degré 1, …, un sommet de degré n-1. Or la présence d'un sommet de degré 0, contredit la présence d'un sommet de degré n-1 .

Exercice n°3

1°) On représente le problème par un graphe tel que:

- Un sommet = un espion (on désigne par A,a les espions de 1e pays , b , B les espions de 2e pays et c,C les espions de 3e pays)

- Une arête = L'un espionne l'autre. On obtient le graphe d'ordre 6 suivant:



2°) Le graphe obtenu n'est pas complet car les sommets a et A ne sont pas adjacents de même pour b, B et c, C.

- Le graphe est connexe car il existe toujours une chaîne reliant deux sommets quelconques du graphe par exemple pour les sommets a et A on a la chaîne A - B - a.

3°)a/ le degré de chaque sommet est 4. (tous les sommets sont de même degré on dit que le graphe est régulier)

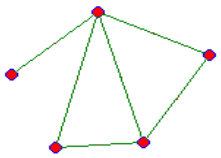
b/ Le nombre d'arrêtes = 1/2 (la somme des degrés des sommets) = 1/2 (4 x 6) =12

A.T.S.M

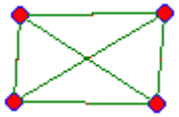
Exercice n°4

1°) Il existe un graphe d'ordre 5 dont les sommets ont pour degrés : 1,2,2,3,4.

Exemple le graphe suivant:

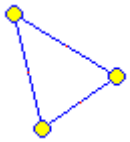
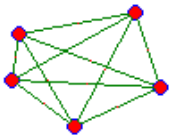
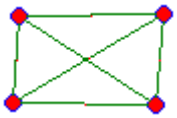


2°) a/ Il existe un graphe d'ordre 4 dont les sommets ont un degré égal à 3 (car dans un graphe le nombre des sommets de degrés impaires est pair). C'est le graphe complet K_4.



b/ Il n'existe aucun graphe d'ordre 5 dont tous les sommets ont un degré égal à 3 car (dans un graphe le nombre des sommets de degrés impaires est pair).

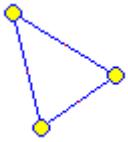
Exercice n°5

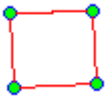
Un graphe complet d'ordre 2 (K_2).	Un graphe complet d'ordre 3 (K_3). 
Un graphe complet d'ordre 5 (K_5). 	Un graphe complet d'ordre 4 (K_4). 

Exercice n°6

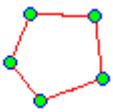
On obtient des graphes cycliques (tous les sommets sont de degré 2).

- Un graphe cyclique d'ordre 2
- Un graphe cyclique d'ordre 3.





- Un graphe cyclique d'ordre 4.
- Un graphe cyclique d'ordre 5.



A.I.S.M

Exercice n°7

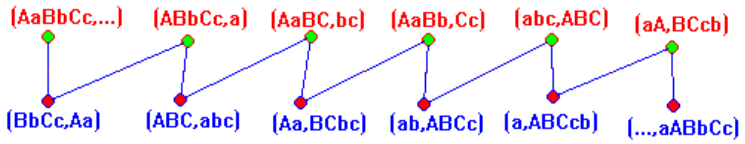
On représente le problème par un graphe tel que:

•un sommet correspond à une situation compatible sur une rive (sur une rive : une femme est toujours en compagnie de son mari en présence des autres hommes, une femme avec d'autres femmes, une femme seule avec son homme).

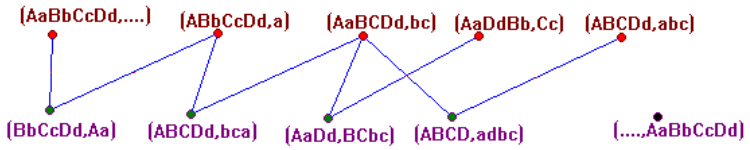
• Une arête correspond à la barque qui transporte deux personnes compatibles (deux femmes, deux hommes , une femme avec son mari) ou une seule personne.

On désigne par : A, B et C les hommes et a, b et c leurs épouses respectives.

On obtient le graphe biparti suivant :



On désigne par (D, d) le 4e couple. on obtient un graphe non connexe il n'existe aucune chaîne reliant les sommets (AaBbCcDd,....) et (....,AaBbCcDd)



Exercice n°8

On représente le problème par un graphe tel que:

• Un sommet = un enfant.

• Une arête = l'un est l'ami de l'autre.

On obtient un graphe d'ordre 20 dont 7 sommets sont des degrés 3 , 9 sommets sont des degrés 4 et 4 sommets sont des degrés 5.

Le nombre des sommets des degrés impairs est 7 + 4 = 11 ce qui est impossible car dans un graphe le nombre des sommets de degré impair est pair.

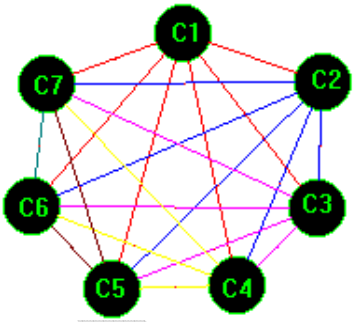
A.T.M

Exercice n°9

On représente le problème par un graphe tel que:

• un sommet C_i correspond à une commission municipale.

• Une arête correspond à un conseiller (membre dans le conseil municipal).



On obtient un graphe complet d'ordre 7.

Le nombre des conseillers = nombre des arêtes

= 1/2 (la somme des degrés des sommets) = 1/2 (7 x 6) = 21.

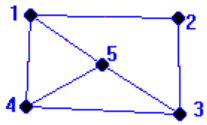
Autrement : Du sommet C_1 part 6 arêtes il reste 5 arêtes partants de C_2 , 4 de C_3 , 3 de C_4 ,2 de C_5 , 1 de C_6 ,0 de C_7 alors le nombres des arêtes est :

1 + 2 +3 +4 +5 +6 = (6 x 7) /2 = 21.

Rappel : 1 + 2 + 3 .....+ n = n (n + 1)/2

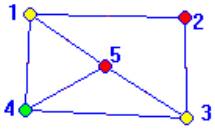
Exercice n°10

On a le graphe suivant:



On prend par exemple :

c_1= le rouge ,c_2= le vert et c_3= le jaune.



1°)on applique l'algorithme de Welsh et powell

Les sommets sont ordonnés suivants leur ordre décroissent des degrés.

sommets	5	4	1	3	2
couleurs	c_1	c_2	c_3	c_3	c_1

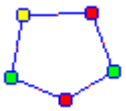
on trouve qu'il suffit trois couleurs pour colorer le graphe.

Puisque le graphe contient un sous graphe complet d'ordre 3 alors le nombre chromatique du graphe est ≥ 3.

Par suite le nombre chromatique du graphe est 3.

2°) Pour les autres graphes on applique le même procédé.

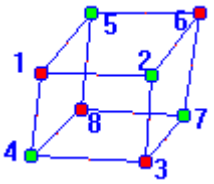
Remarque : on peut pas appliquer ce procédé d'une manière général. On peut trouver un graphe dont le nombre chromatique est n sans qu'il contienne un sous graphe complet d'ordre n. Exemple : le graphe cyclique d'ordre 5 son nombre chromatique est 3 et il ne contient pas un sous graphe complet d'ordre 3.

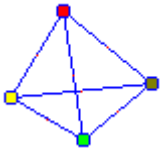


A.I.S.M

(Pour un graphe cyclique son nombre chromatique est 2 si son ordre est pair , 3 si son ordre est impair)

Exercice n°11





on applique l'algorithme de Welsh et Powell on trouve qu'il suffit deux couleurs pour colorer le graphe. et il faut au moins deux couleurs pour le colorer donc le nombre chromatique est 2.	on applique le même procédé que dans l'exercice 10 on trouve le nombre chromatique du graphe est 3.	Ce graphe est complet d'ordre 4 alors son nombre chromatique est 4.

Exercice n°12

On représente le problème par un graphe tel que :

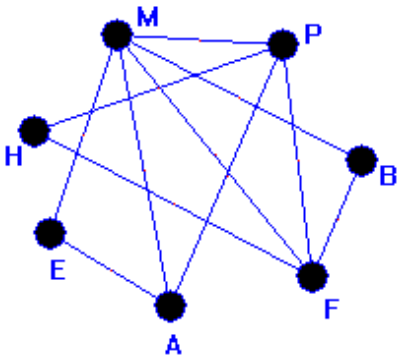
- un sommet = une discipline (M: mathématiques, P: physique, B : biologie, F : français, A: anglais, E: espagnol, H: histoire)

- une arête = le deux disciplines passer par un même élève.

on a :

Ali	Fatma	M^{ed}	sarra
M,P,A	M,B,F	M,A,E	P,F,H

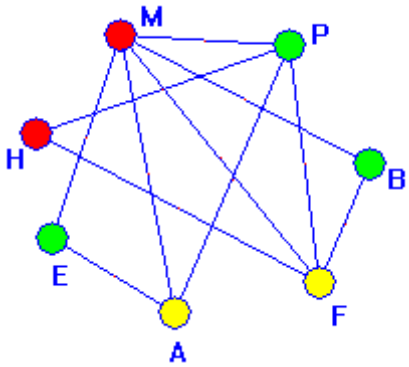
on obtient le graphe suivant:



Le nombre minimal de plages horaires = nombre minimal des couleurs pour colorer le graphe = le nombre chromatique du graphe.

on appliquant même procédé que l'exercice 10 on trouve le nombre chromatique du graphe est 3.

Donc il faut 3 plages horaires à prévoir pour qu'aucun élève n'ait à passer deux tests simultanément.



Exercice n°13

1°) on a $1 + i \leq 21$ pour tout i =2,3,....,20. alors le sommet 1 est adjacent à tout sommet i du graphe.

soient i et j deux sommets quelconques du graphe il existe toujours une chaîne reliant i et j par exemple la chaîne i - 1 - j. Alors le graphe est connexe.

2°) Pour tout i = 1,2,3,....,11 et j = 1,2,3,...11. avec i différent de j on a $i + j \leq 21$ alors le sous graphe contenant les sommets 1,2,3,.... et 11 est complet est le plus grand sous graphe car 11 + 12 = 23 > 21 alors le nombre chromatique du graphe est ≥ 11.

En appliquant l'algorithme de Welsh et Powell on trouve qu'il suffit 11 couleurs pour colorer le graphe alors le nombre chromatique est 11.

Algorithme de Welsh et Powell.

Les sommets sont ordonné dans l'ordre décroissant de leurs degrés.

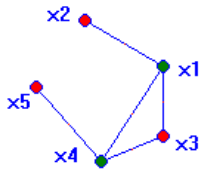
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2

Exercice n°14

On représente le problème par un graphe tel que :

- Un sommet = un inconnue x_i , i = 1,2,3,4,5.
- Une arête = les deux inconnues dans la même inéquation.

on obtient le graphe suivant:



Le nombre maximal des sommets non adjacents du graphe est 3. sont x_2 , x_3 et x_5.

Alors on prend $x_2 = x_3 = x_5 = 1$ et $x_1 = x_4 = 0$.

Alors une solution qui maximise la fonction Z est (0,1,1,0,1)

Exercice n°15

On a le tableau suivant:

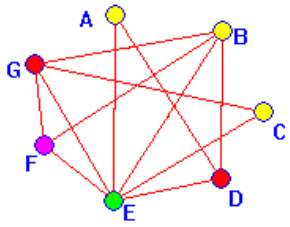
élève	A	B	C	D	E	F	G
a rencontré	D,E	D,E,F,G	E,G	A,B,E	A,B,C,D,F,G	B,E,G	B,C,E,F

On représente le problème par un graphe tel que:

Un sommet = élève. Une arête = l'un à rencontré l'autre.

On obtient un graphe d'ordre 7.

A.T.S.M



Chercher le nombre minimal de places assises qui doit disposer la bibliothèque revient à chercher le nombre minimal des couleurs pour colorer le graphe (Le nombre chromatique du graphe).

On applique le même travail que l'exercice 10.- Le graphe contient un sous graphe complet d'ordre 4 (B,E,F,G) alors le nombre chromatique est ≥ 4.

- On applique l'algorithme de Welsh et Powell.

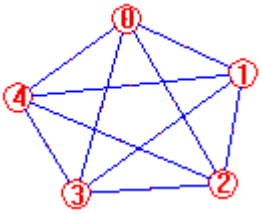
sommet	E	B	G	F	D	C	A
degré	6	4	4	3	3	2	2
couleur	C1	C2	C3	C4	C3	C2	C2

On prend par exemple : C1 = vert, C2 = Jaune, C3=Rouge et C4 = violet.

Alors le nombre minimal des places assises est 4.

Exercice n°16

1°) On représente le problème a l'aide d'un graphe tel que :



Un sommet = un chiffre i (0,1,2,3,4)

Une arête = Un domino.

On obtient un graphe complet G d'ordre 5.

2°) Puisqu 'il existe un seul domino qui porte deux numéros distincts.

Pour aligner les dominos de telle sorte que deux dominos se touchent les chiffres en contact soient identiques revient à parcourir tous les sommets du graphe en passant une seule fois par chaque arête. Donc le problème revient à chercher une chaîne Eulérienne dans le graphe G.

3°) Le graphe G est complet d'ordre 5 tous ces sommets sont de degrés pairs alors il admet un cycle Eulérien) .Exemple d'un cycle Eulérien:0-1-2-0-4-1-3-2-4-3-0.

4°) a/ Si les dominos ne contiennent que les chiffres 0,1,2,3 on obtient un graphe complet d'ordre 4 dont les sommets sont des degrés impairs (degré de chaque sommet est 3) alors le graphe n'admet pas des chaînes Eulériennes. (Voir le théorème 1 d'Euler) . Donc le problème n'admet pas de solution.

b/ Si les dominos ne contiennent que les chiffres 0,1,2,3,4,5,6 on obtient un graphe complet d'ordre 7 dont les sommets sont des degrés pairs (degré de chaque sommet est 6) alors le graphe admet un cycle Eulérien.(Voir le théorème 2 d'Euler). Alors le problème admet une solution.

Exercice n°17

On applique les théorèmes 1 et 2 d'Euler.

A.T.S.M

Exercice n°18

On représente le problème par un graphe tel que :

* Un sommet = un baron.

* Une arête = l'un est voisin de l'autre.

On obtient un graphe d'ordre 19 dont les sommets sont de degrés impairs ce qui est impossible car dans un graphe le nombre des sommets des degrés impairs est pair. Donc c'est impossible que chaque baron ait comme voisins un, cinq ou 9 barons.

Exercice n°19

On représente le problème par un graphe tel que :

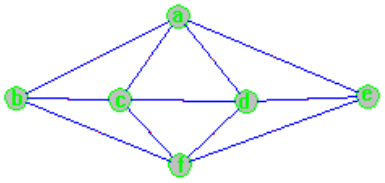
• Un sommet = une personne ayant vécu ou vivant.

• Une arête = ont donné une poignée de main.

Dans un graphe le nombre des sommets des degrés impairs est pair alors le nombre des personnes qui ont donné un nombre impair de poignées de main est pair. (N est pair).

Exercice n°20

On a le graphe G suivant:



1°) le graphe G n'admet pas de cycle Eulérien car il a deux sommets de degré impairs.

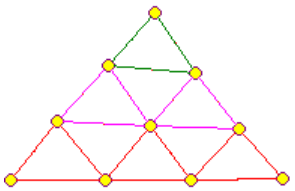
(Pour qu'un graphe connexe G admet un cycle Eulérien si et seulement si Tous ses sommets sont de degré pair).

Le graphe G admet une chaîne Eulérienne car il à deux sommets de degré impair ce sont les extrémités de la chaîne. et tous les autres sommets sont de degré pair. (a de degré 4, b de degré 3, c de degré 4, d de degré 4, f de degré 4,e de degré 3) Les sommets b et e sont les extrémités de la chaîne.

2°) b-a-c-b-f-c-d-a-e-f-d-e.

Exercice n°21

On a le graphe G suivant:



1°) Tous les sommets du graphe sont de degré pair alors il admet un cycle Eulérien.

2°) a/ Le nombre des triangles dans le graphe T_n est 1 + 2 +3 +....+ n = n (n+1)/2

Chaque triangle contient 3 arêtes alors le nombre d' arêtes dans le graphe T_n est :

3 n (n +1) /2

Exemple: Dans le graphe T_3 de la question 1°) le nombre d'arêtes est 3x3x4/2= 18.

A.T.S.M

b/ Il suffit de démontrer que "les sommets du graphe sont de degré pair".

Par récurrence: Pour n=1 c'est vrai. on a T_1 est un graphe triangulaire complet tous ses sommets de degré pair.

On suppose que c'est vraie pour n signifie les sommets du graphe T_n sont de degré pair.

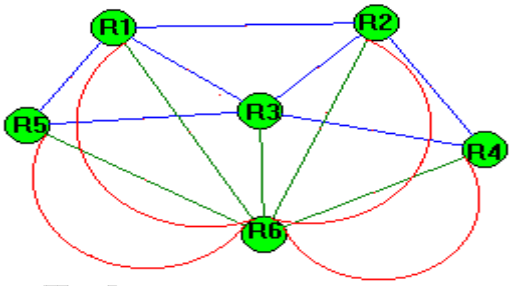
On a T_{n+1} est obtenu on ajoutant à T_n , (n+1)rangées de triangles.

On a les sommets de T_n sont de degré pair par hypothèse et la rangée de (n+1) triangle est un graphe dont les sommets sont de degré pair alors les sommets du graphe T_{n+1} sont de degré pair.

Alors pour tout n on a les sommets du graphe T_n sont de degré pair .

Alors T_n possède un cycle Eulérien.

Exercice n°22

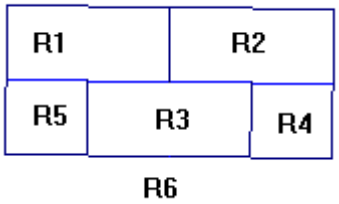


On représente le problème par un graphe tel que :

• Un sommet = Une région R_i avec i = 1,2,3,4,5,6

* Une arête = Un segment entre les deux régions.

On obtient le graphe ci contre:



Le problème revient à trouver une chaîne Eulérienne dans le graphe.

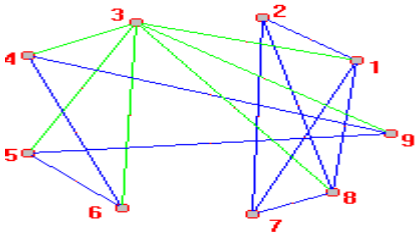
Puisqu'on a quatre sommets de degré impair

alors le graphe ne possède aucune chaîne Eulérienne (Voir le théorème 1 d'Euler)

Alors il est impossible de tracer une courbe sans lever le crayon, qui coupe les 16 segments.

Exercice n°23

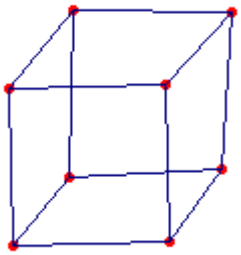
On a le graphe suivant:



Si on enlève le sommet 3 on obtient un graphe non connexe. Il n'existe pas des chaînes reliant les sommets (4,5,6,9) et (2,1,7,8)

Exercice n°24

On obtient le graphe suivant:



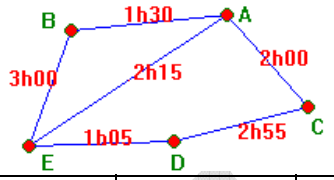
Le problème revient à déterminer une chaîne Eulérienne dans le graphe ce qui est impossible car les sommets sont tous de degré impair. (3).

Alors il est impossible de préparer une carcasse de cube de 10 Cm d'arête sans couper le fil.

Exercice n°25

E	D	C	B	A	
2h15		2h00	1h30		A
3h00					B
	2h55				C
1h05					D

On obtient le graphe suivant:

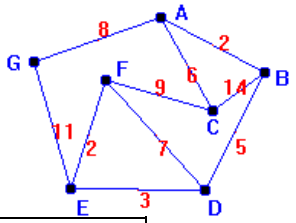


On applique l'algorithme de DIJKSTRA sur le graphe :

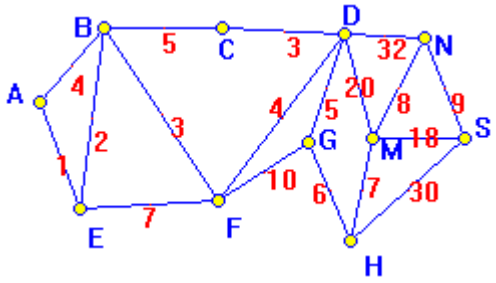
B	A	C	E	D	On garde	coefficient
0	¥	¥	¥	¥	B	0
	0+1h30 1h30 B	¥	0+3h 3h B	¥	A	1h 30
		1h30 +2h00 3h30 A	1h30+2h15 3h00 B	¥	E	3h00
		3h30 A		3h +1h05 4h05 E	C	3h30
				3h30+ 2h55 4h 05 E	D	4h 05

Alors le trajet le plus rapide entre les deux villes B et D est : B- E - D de poids 4h 05.

Exercice n°26 On applique l'algorithme de Dijkstra sur le graphe pour trouver les plus courtes chaînes (Les chaines de poids minimum) à partir du sommet C. (même travail pour le sommet F)



C	A	B	F	G	E	D	On garde	coefficient
0	¥	¥	¥	¥	¥	¥	C	0
	0+6 6 C	0+14 14 C	0+9 9 C	¥	¥	¥	A	6
		6+2 8 A	9 C	6+8 14 A	¥	¥	B	8
			9 C	14 A	¥	8+5 13 B	F	9
				14 A	9+2 11 F	9+7 13 B	E	11
				11+11 14 A		11+3 13 B	D	13
				14 A			G	14



Exercice n°27

On a le graphe suivant:

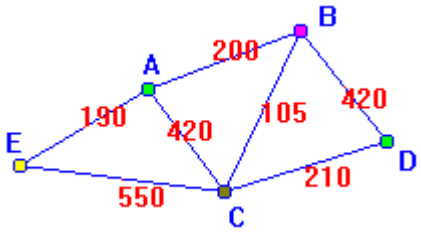
On applique l'algorithme de Dijkstra sur le graphe pour trouver la plus courte chaîne (La chaîne de poids minimum) de A à S.

A	B	E	C	D	F	G	M	N	H	S	On garde	coefficient
0	¥	¥	¥	¥	¥	¥	¥	¥	¥	¥	A	0
	0+4 4 A	0+1 1A	¥	¥	¥	¥	¥	¥	¥	¥	E	1
	1+2 3 E		¥	¥	1+7 8 E	¥	¥	¥	¥	¥	B	3
			3+5 8 B	¥	3+3 6 B	¥	¥	¥	¥	¥	F	6
			8 B	6+4 10 F		6+10 16 F	¥	¥	¥	¥	C	8
				8+3 10 F		16 F	¥	¥	¥	¥	D	10
						10+5 15 D	10 +20 30 D	10+32 42 D	¥	¥	G	15
							30 D	42 D	15+6 21 G	¥	H	21
							21+7 28 H	42 D		21+30 51 H	M	28
								28+8 36 M		28+18 46 M	N	36
										36+9 45 N	N	45

Alors la chaîne la plus courte de A à S est : A-E-B-F-D-G-H-M-N-S de poids 45.

Exercice n°28

1°) On a le graphe suivant:

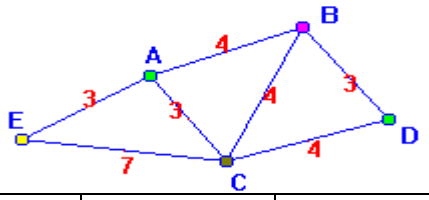


On applique l'algorithme de Dijkstra:

D	B	C	A	E	on garde	coefficient
0	¥	¥	¥	¥	D	0
	0+420 420 D	0+210 210 D	¥	¥	C	210
	210+105 315 C		210+420 630 C	210+550 760 C	B	315
			315+200 515 B	760 C	A	515
				515+190 705 A	E	705

Le chemin le plus court entre D et E est : D-C-B-A-E.

2°) On a le graphe suivant:



On applique l'algorithme de Dijkstra:

D	B	C	A	E	on garde	coefficient
0	¥	¥	¥	¥	D	0
	0+3 3 D	0+4 4 D	¥	¥	B	3
		3+4 4 D	3+4 7 B	¥	C	4
			4+3 7 C (7 B)	4+7 11 C	A	7
				7+3 10 A	E	10

Il y a deux itinéraires le moins cher entre D et E.

* D-C-A-E de poids 10 .

* D-B-A-E de poids 10 .

Exercice n°29

On représente le problème avec un graphe G tel que :

Un sommet = une personne parmi les huit.(On désigne par X : M^{eme} X et Y : M^{r} X)

Une arête = les deux personnes ont échangé des poignées de main.

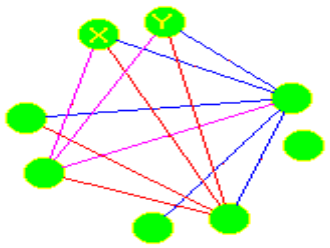
On obtient un graphe G d'ordre 8 dont sept sommets sont de degrés différents. Deux sommets du même couple ne sont pas adjacents. Dans un graphe il y a au moins deux sommets de même degré alors les sommets X et Y sont de même degré. On a sept sommets de degrés différents (Un sommet est adjacent au plus à six sommets).

Pour le couple (XY) les sommets sont de même degré pour les autres couples :

Dans le premier couple si un sommet de degré 6 l'autre sera de degré 0, dans le second couple si un sommet de degré 5 l'autre sera de degré 1 et pour le troisième couple un sommet de degré 4 et l'autre de degré 2.

Alors les sommets X et Y sont de degré 3.

On obtient le graphe suivant:



M^{r} et Mme X ont échangées 6 poignées de main.

(Chaque couple il a échangé 6 poignées de main).

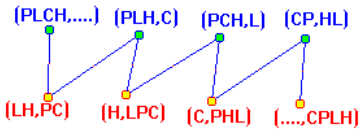
Exercice n°30

On désigne par P = Le passeur, C = Chèvre , H = Choux et L = le loup.

On représente le problème par un graphe tel que:

• Un sommet = Une situation compatible sur un rive on le représente par un couple:

(Les éléments compatibles sur le 1e rive,Les éléments compatibles sur le 2e rive).

• Une arête = ce que transporte la barque pour passer d'une situation compatible d'un rive à une autre situation compatible sur l'autre rive.

On obtient un graphe biparti: