

Notion de graphe

Circulation sur un graphe

Bacha Samy
CREFOC Radès



INTRODUCTION

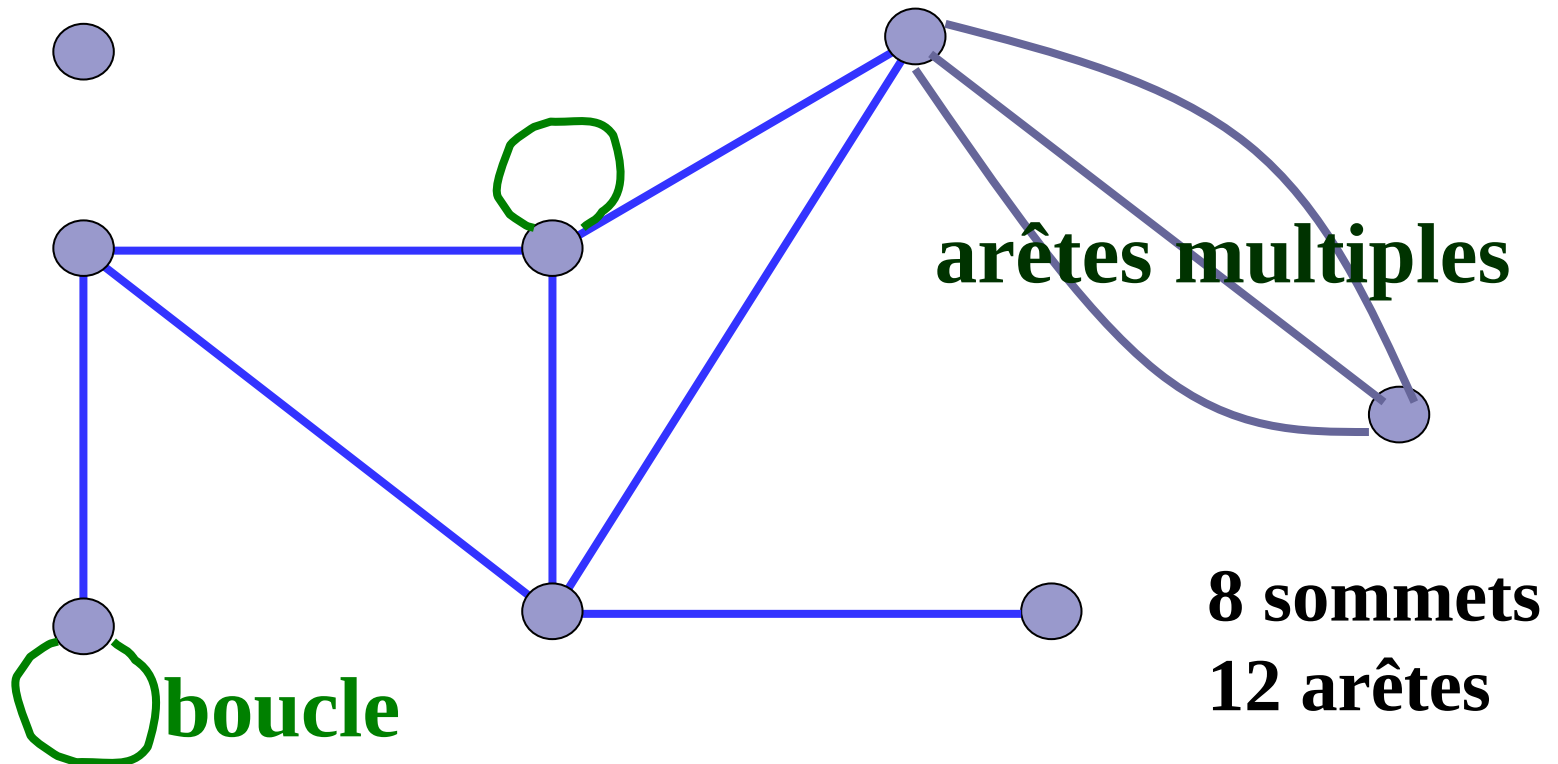
La théorie des graphes permet de résoudre efficacement une grande variété de problèmes pratiques ou récréatifs en les ramenant à des configurations qui se dessinent simplement à l'aide de points et de liaisons entre ces points.



Ses applications pratiques sont très diverses:

- Optimisation des réseaux de transport : transports routiers ou transports d'information
- Conception de réseaux électriques, de réseaux de communication
- Mécanique statistique, formules chimiques, informatique théorique, sciences sociales, géographie, architecture...

Un graphe est la donnée d'un couple $G = (X, A)$
où X est un ensemble fini
et A une famille finie dont chaque élément est une paire
d'éléments (non nécessairement distincts) de X .
Les éléments de X sont appelés **sommets** ou **nœuds** de G ,
Les éléments de A sont appelés **arêtes** de G .
L'**ordre** de G est par définition le nombre de sommets de G .

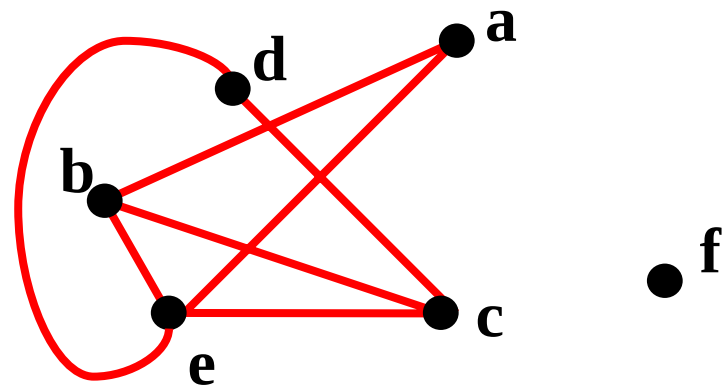
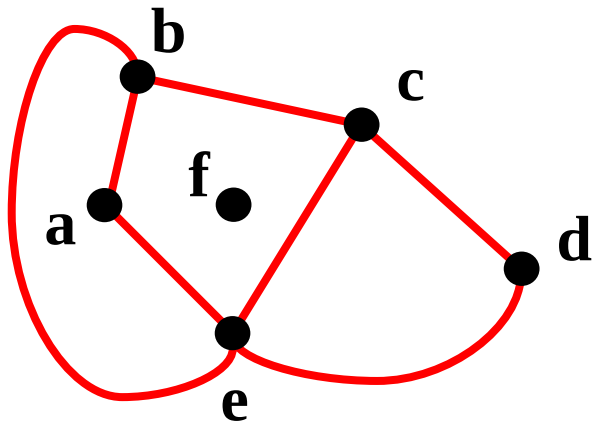


Exemples

Le graphe d'un tournoi $T = (X, A)$ où :
X est l'ensemble des participants au tournoi,
A est l'ensemble des paires de joueurs se rencontrant dans le tournoi.

La carte routière de la Tunisie
X est l'ensemble des villes de la Tunisie,
 $A = \{ \{x, y\} / \text{il y a au moins une route directe reliant les villes } x \text{ et } y \}$

Un **graphe simple** est un graphe qui ne possède ni boucle ni arêtes multiples.





**Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes
dont il est une extrémité.**

Théorème :
**La somme des degrés des sommets d'un graphe
est un nombre pair.**

La somme des degrés est le nombre d'extrémités des arêtes.

Théorème :
**Le nombre de sommets de degré impair
est un nombre pair.**

Lemme des poignées de mains

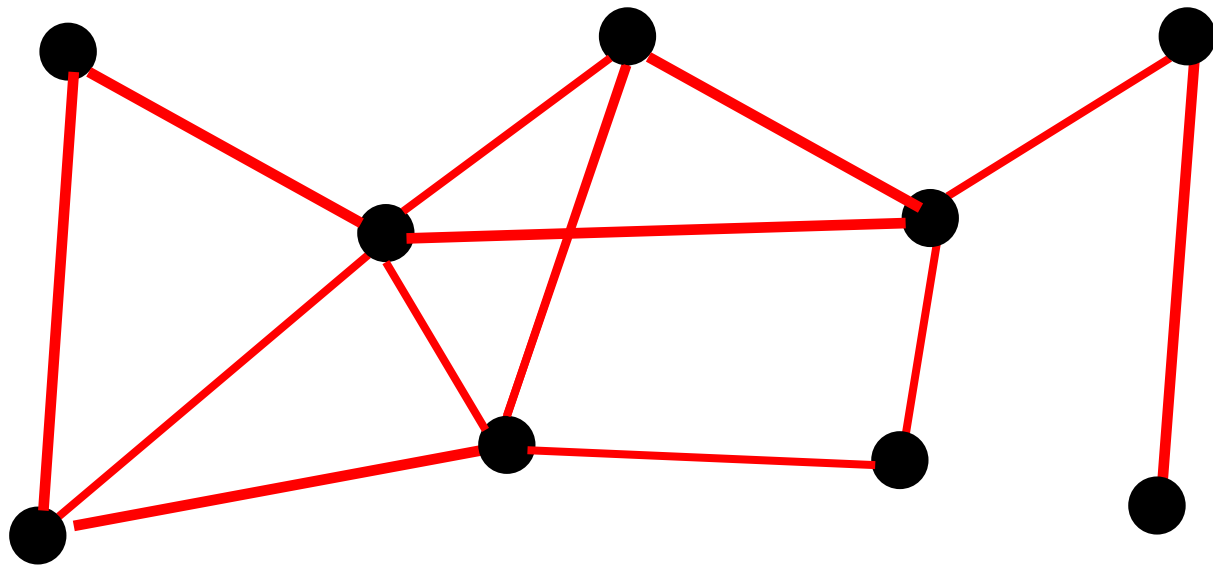
Soit $G = (X, A)$ un graphe simple alors

$$\sum_{x \in X} d(x) = 2 \cdot |A|$$

($|A|$ est le nombre d'arêtes)

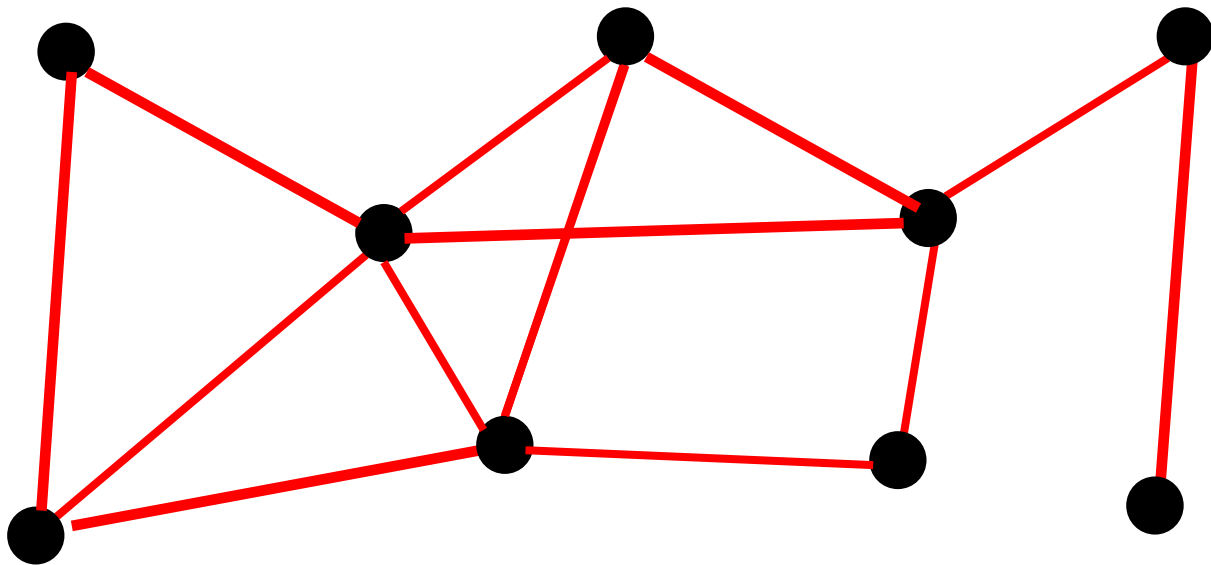
(La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à 2 fois son nombre d'arêtes)

Deux sommets sont adjacents s'ils sont joints par *au moins* une arête.



Deux sommets sont adjacents s'ils sont joints par *au moins* une arête.

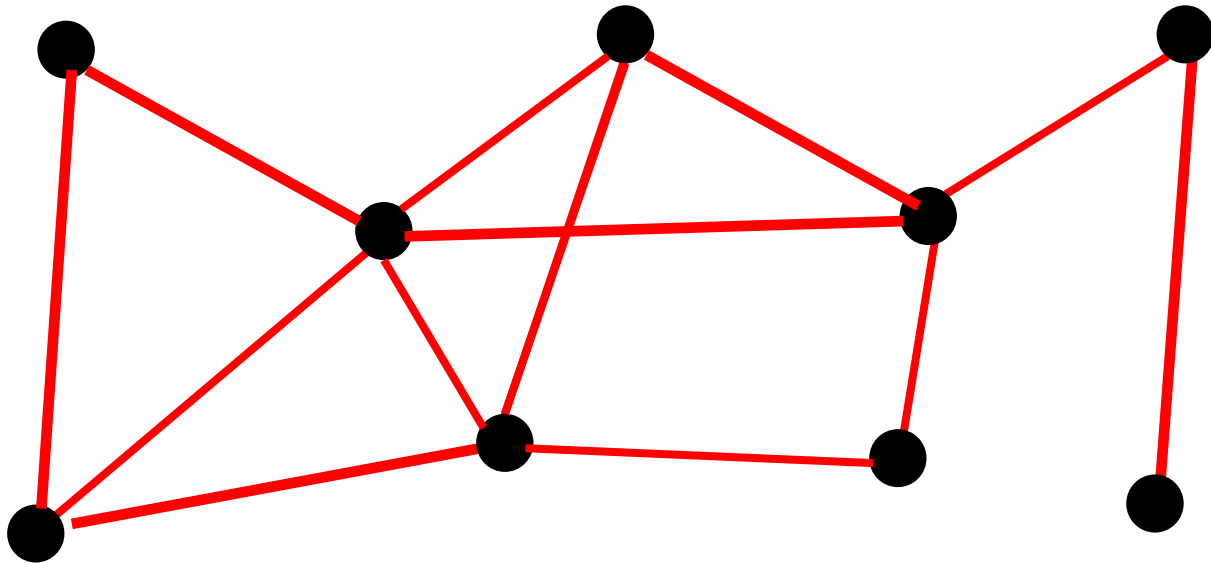
Deux arêtes sont adjacentes si elles ont une extrémité commune.



Deux sommets sont adjacents s'ils sont joints par *au moins* une arête.

Deux arêtes sont adjacentes si elles ont une extrémité commune.

Une chaîne est une suite (*non vide*) finie d'arêtes adjacentes. La longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la décomposent

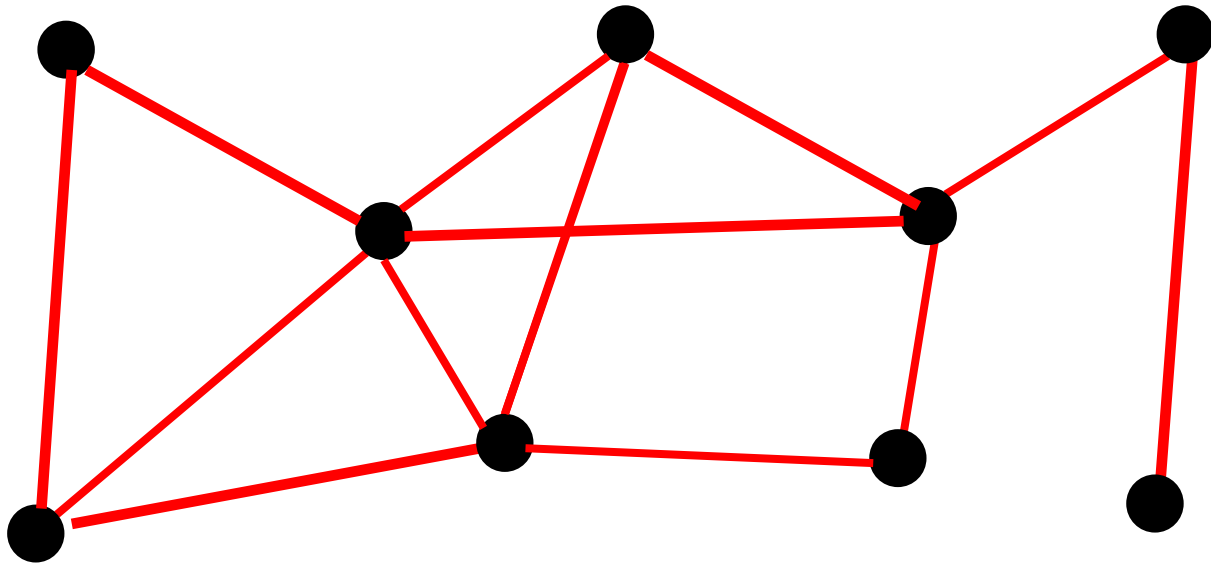


Deux sommets sont **adjacents** s'ils sont joints par *au moins* une arête.

Deux arêtes sont **adjacentes** si elles ont une extrémité commune.

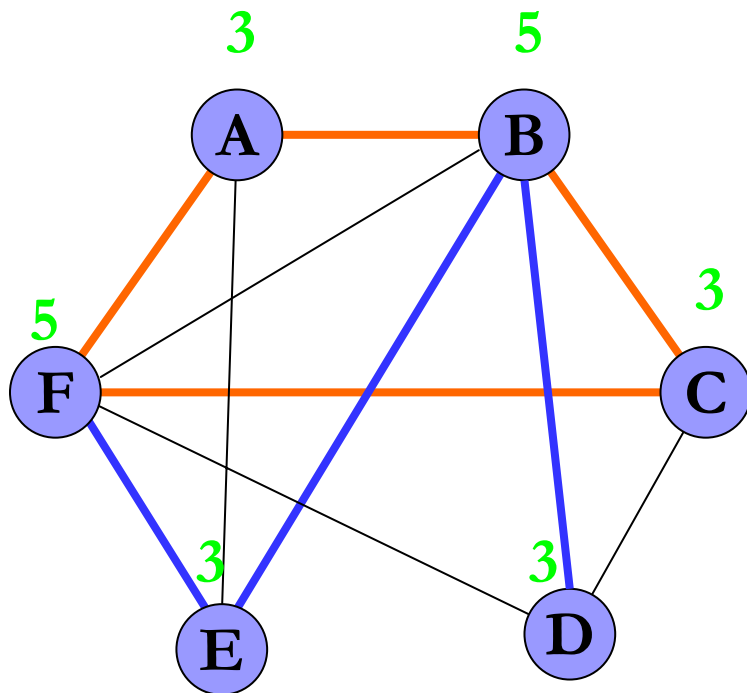
Une **chaîne** est une suite (*non vide*) finie d'arêtes adjacentes. La **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la décomposent

Un **cycle** est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues composée d'arêtes toutes distinctes.



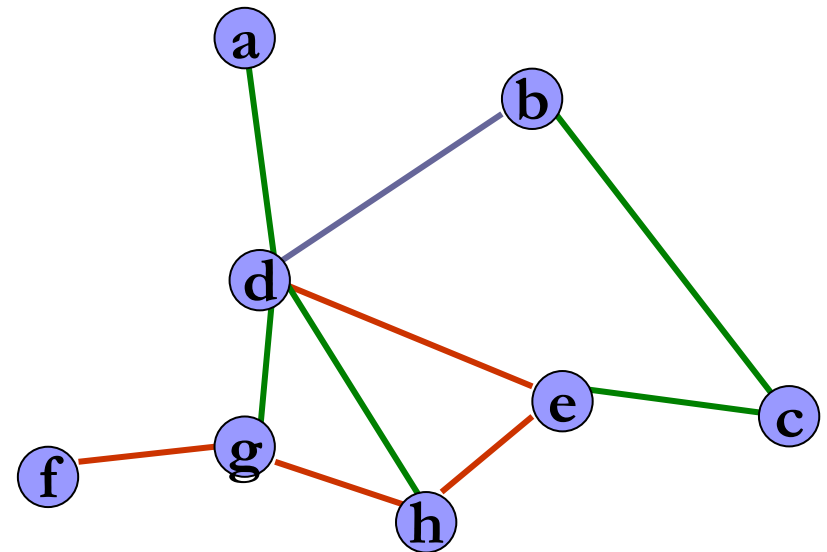
Pour un graphe simple d'ordre n , le degré d'un sommet est un entier compris entre 0 et $n-1$.

Une chaîne **simple** ne peut pas visiter le même sommet deux fois .



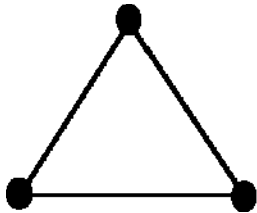
FABCF est un cycle (chaîne fermée)

FEBD est une chaîne simple

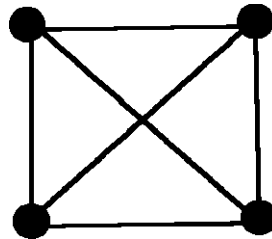


fghedb est une chaîne simple

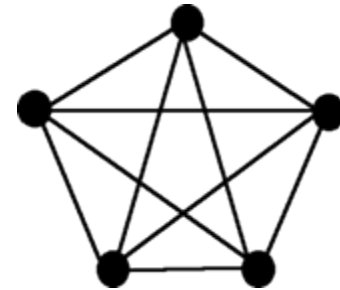
Un graphe est dit **complet** si chaque sommet est relié à tous les autres



K_3



K_4



K_5

Soit $G = (X, A)$ un graphe simple, et x un sommet de ce graphe. Le degré de x noté $d(x)$

Lorsque $d(x) = 0$, on dit que x est un sommet isolé, lorsque $d(x) = 1$, le sommet x est dit pendant

Si G est un cycle alors

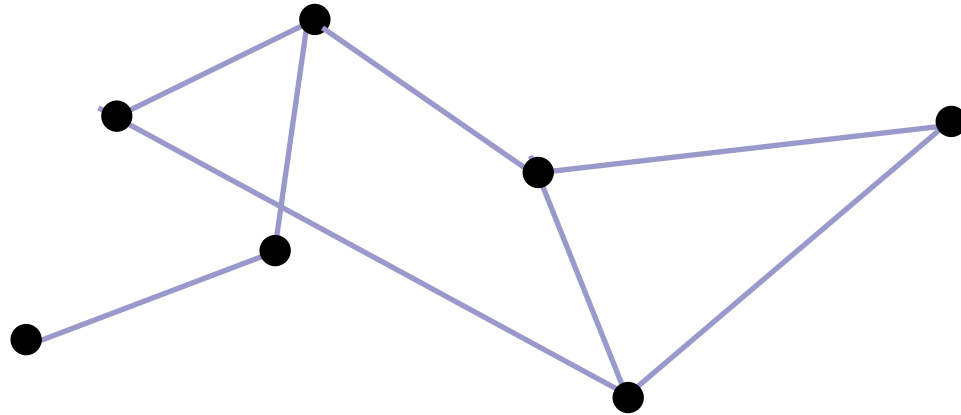
pour tout sommet x , $d(x) = 2$

G est complet d'ordre n , alors pour tout sommet x , $d(x) = n - 1$

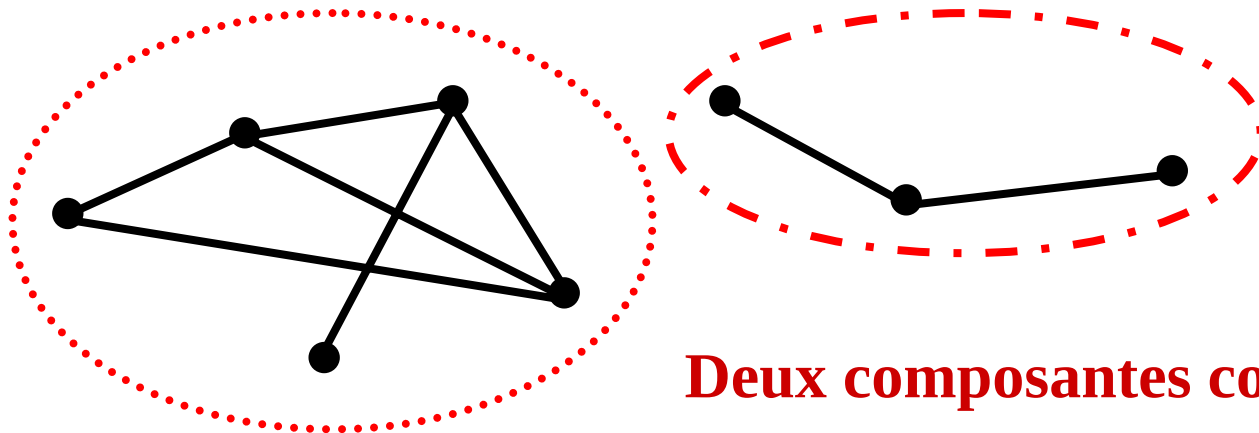
Un graphe simple est dit régulier de degré r si tous ses sommets sont de degré r .

Un graphe est dit **connexe** si quels que soient les sommets i et j distincts, il existe un chaîne joignant i à j .

Graphe connexe :



Graphe non-connexe :



Deux composantes connexes

Définitions

- **Chaîne eulérienne** : chaîne simple passant par toutes les arêtes d'un graphe.
- **Cycle eulérien** : cycle simple passant par toutes les arêtes d'un graphe une et une seule fois.
- **Graphe eulérien** : graphe qui possède un cycle eulérien.
- **Graphe semi-eulérien** : graphe qui possède une chaîne eulérienne.

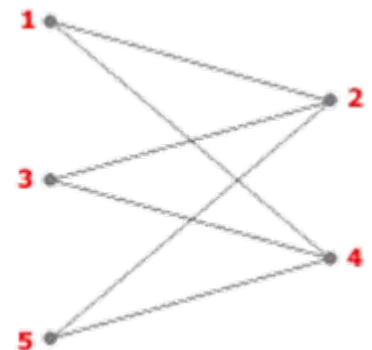
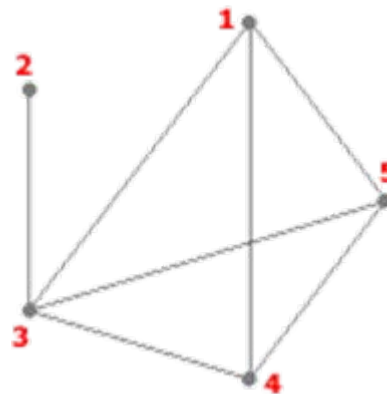
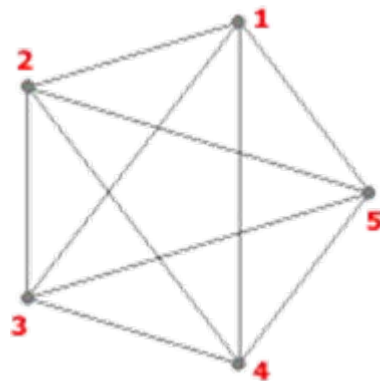
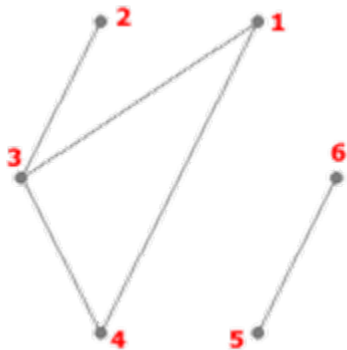
Théorème d'Euler (1766)

Un graphe simple connexe $G = (X, A)$ est **eulérien**
(cad. Admet un cycle eulérien) si et seulement
si tous ses sommets sont de degré pair.

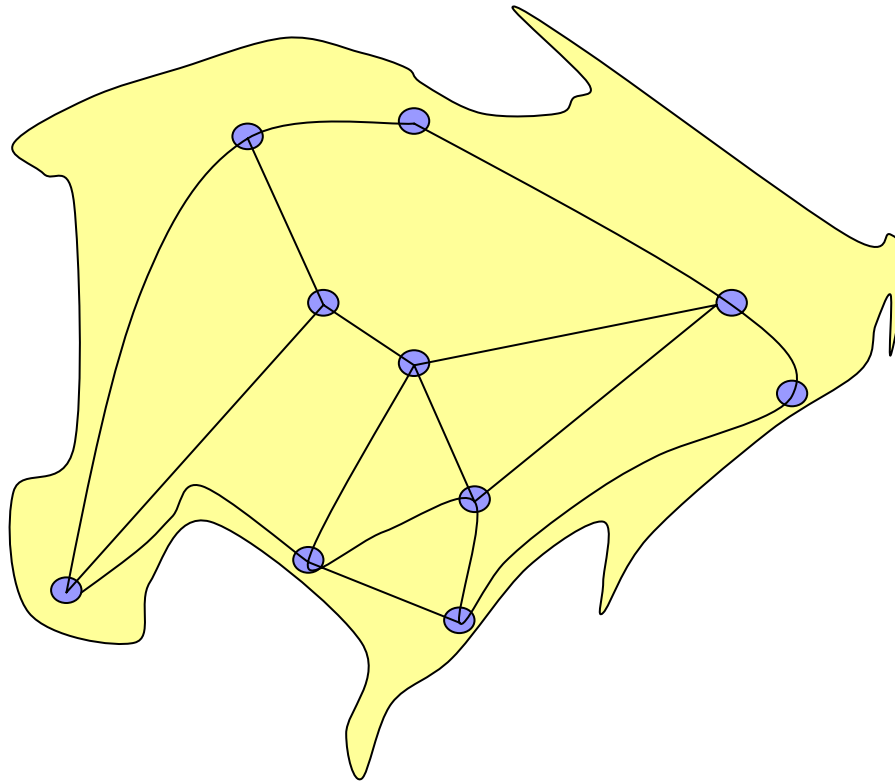
Théorème

Un graphe simple connexe $G = (X, A)$ est semi-eulérien
(cad. Admet une chaîne eulérienne)
si et seulement si il admet 0 ou exactement deux sommets
de degré impair.

Les graphes ci-dessous sont-ils eulériens (ou semi-eulériens) ?

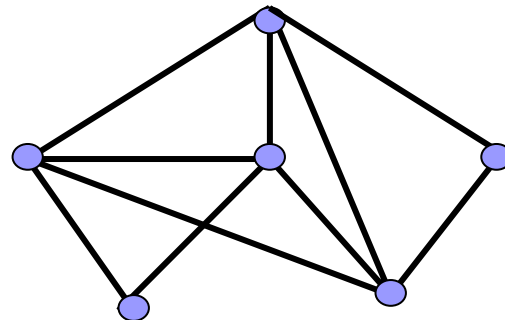
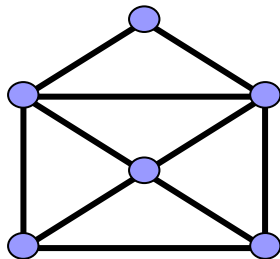
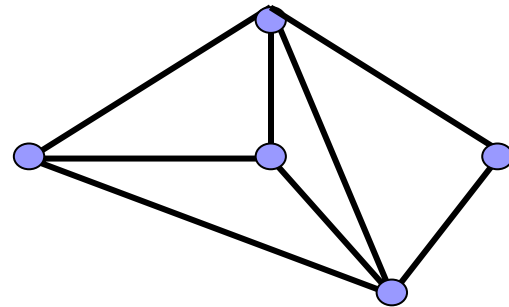
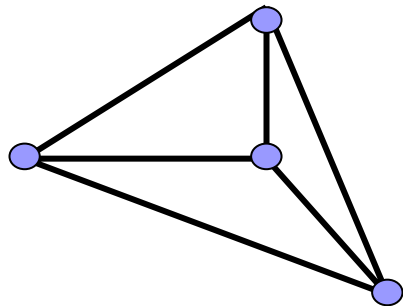
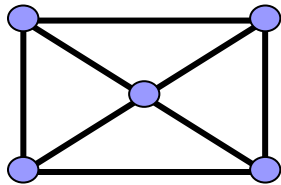


Le schéma ci-dessous représente la carte routière de
l'île de Djerba.
Déterminer le nombre de tronçons de routes existant
dans l'île



- 
- Combien faut-il prévoir de matchs à jouer si l'on veut organiser un championnat de 14 équipes ?
 - Dans un village, il y a 15 appareils téléphoniques, tous fixes. Est-il possible de les relier par des fils téléphoniques pour que chaque appareil soit relié avec 5 autres ?

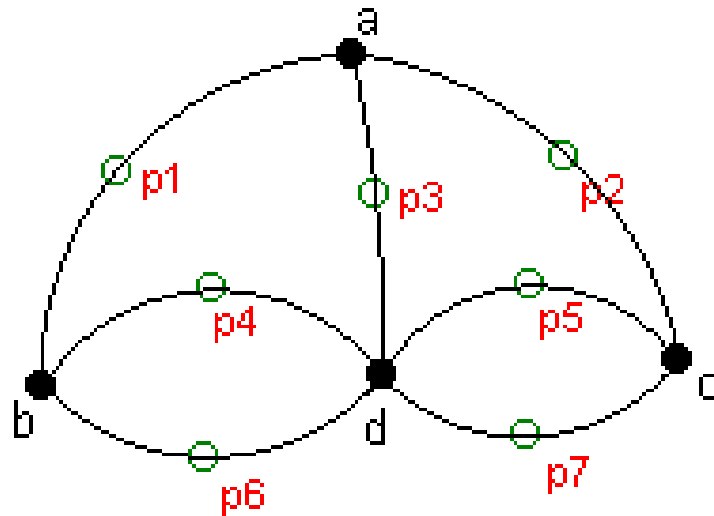
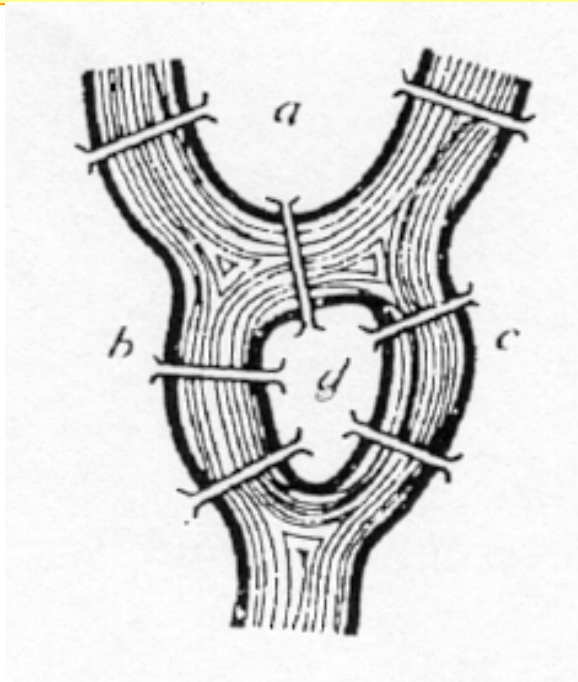
Peut-on parcourir une fois et une seule
les arêtes des graphes ci-dessous
sans lever le crayon ?



les ponts de Königsberg

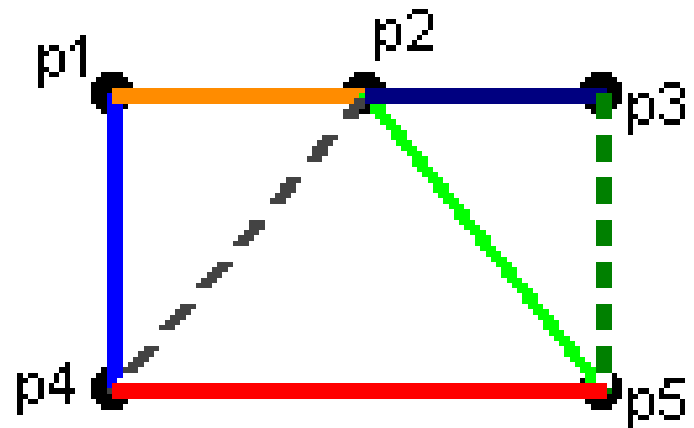
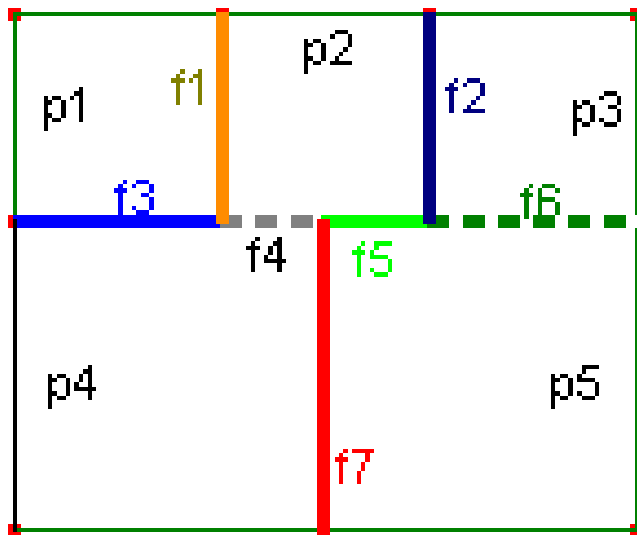
Au XVIIIème siècle, les habitants de Königsberg (actuellement Kaliningrad, région de la Russie frontalière de la Pologne et de la Lituanie) aimaient se promener le dimanche. La ville de Königsberg comprenait 7 ponts, disposés selon le schéma ci-dessous.

Le souhait des habitants de Königsberg était de faire un trajet passant une fois et une seule par chaque pont. Comment faire ?



traversée de frontières

Cinq pays sont représentés ci-contre avec leurs frontières.
Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir en franchissant
chaque frontière une fois et une seule ?





Une ligue de football comporte 5 équipes.

- il est décidé par le bureau de la ligue que lors d'un week-end d'entraînement, chaque équipe jouera quatre matches (deux équipes ne peuvent pas se rencontrer plus d'une fois).

Comment l'organiser?

- le calendrier étant trop chargé, les organisateurs décident que chaque équipe ne jouera que trois matches. Comment l'organiser ?

**Montrez que dans un groupe de personnes,
il y a toujours deux personnes ayant le même nombre d'amis
présents**

**Il n'existe aucun graphe dont tous les sommets ont des degrés
distincts**

