Graphes orientés

Bacha Samy

CREFOC Radès

Un graphe orienté G est la donnée d'un couple G = (X , A)

où $X = \{ x_1 , x_2 , \ldots\ldots , x_n \}$ est un ensemble fini

dont les éléments sont appelés **sommets**

et un ensemble $A = \{ a_1 , a_2 , \ldots\ldots , a_p \}$ partie du produit cartésien X×X

dont éléments sont appelés **arcs**.

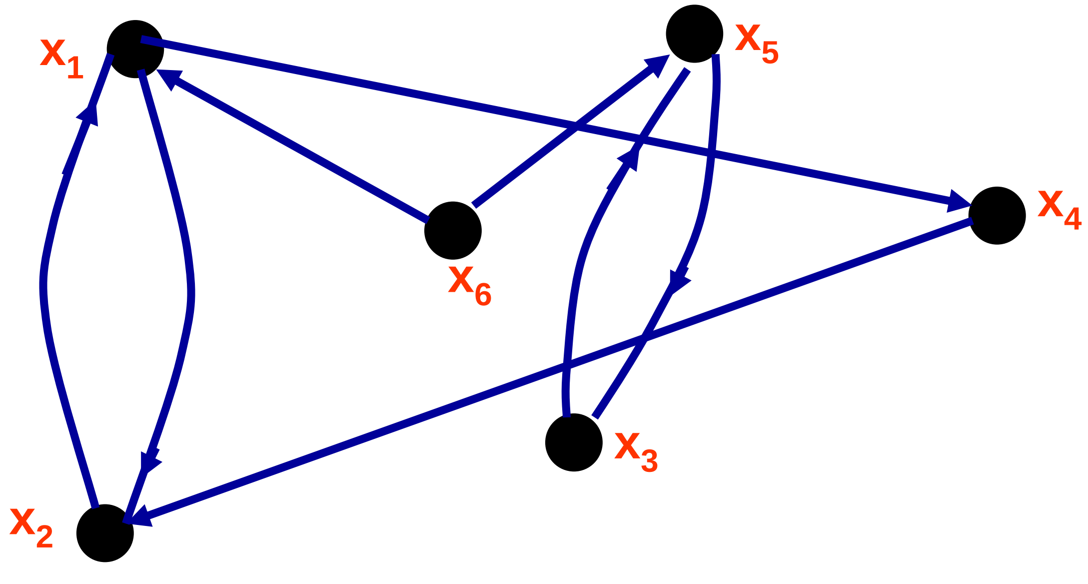
On notera G = (X , A) .

Si a = (x , y) est un arc du graphe G,

x est l' **extrémité initiale** (ou origine de a)

et y est l' **extrémité finale** (ou destination)de a.

Un arc (x , x) est appelé une **boucle**.

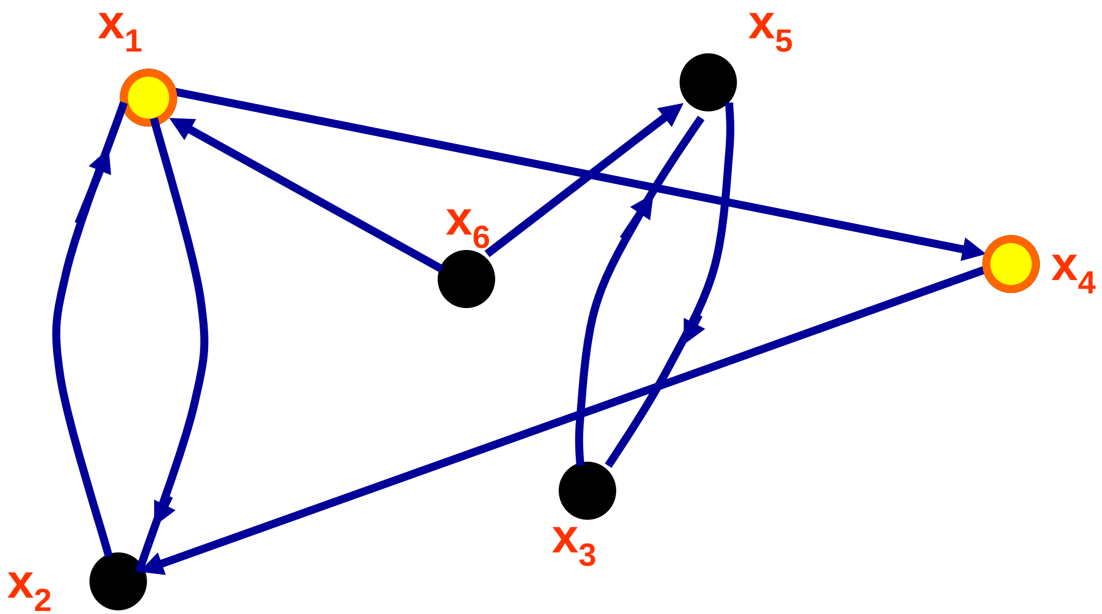


Exemples

Le graphe d'un tournoi $T = (X , A)$ où :
X est l'ensemble des participants au tournoi,
$(x , y) \in A$ si et seulement si x a battu y .

X est un ensemble d'entiers ,
$(x , y) \in A$ si et seulement si x divise y .

Deux sommets x et y sont adjacents si (x , y) ∈ A ou (y ,x) ∈ A .



Soit x un sommet d'un graphe orienté

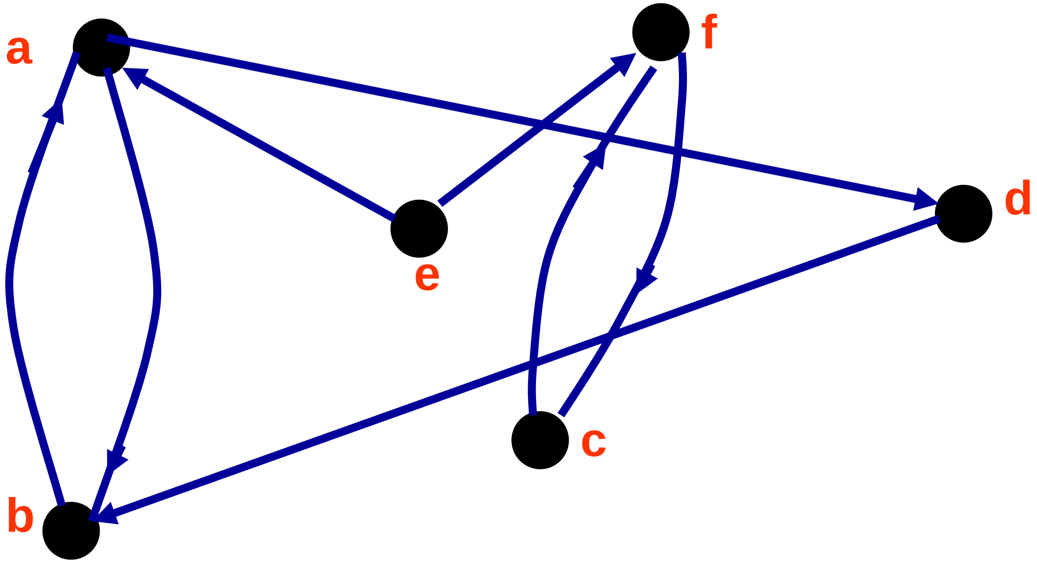
On note $d^+(x)$ *(le demi-degré extérieur de x)*
le nombre d'arcs ayant x comme extrémité initiale.

On note $d^-(x)$ *(le demi-degré intérieur de x)*

le nombre d'arcs ayant x comme extrémité finale.

$$d(x) = d^+(x) + d^-(x)$$

$$\Sigma\, d^+(x) = \Sigma\, d^-(x)$$



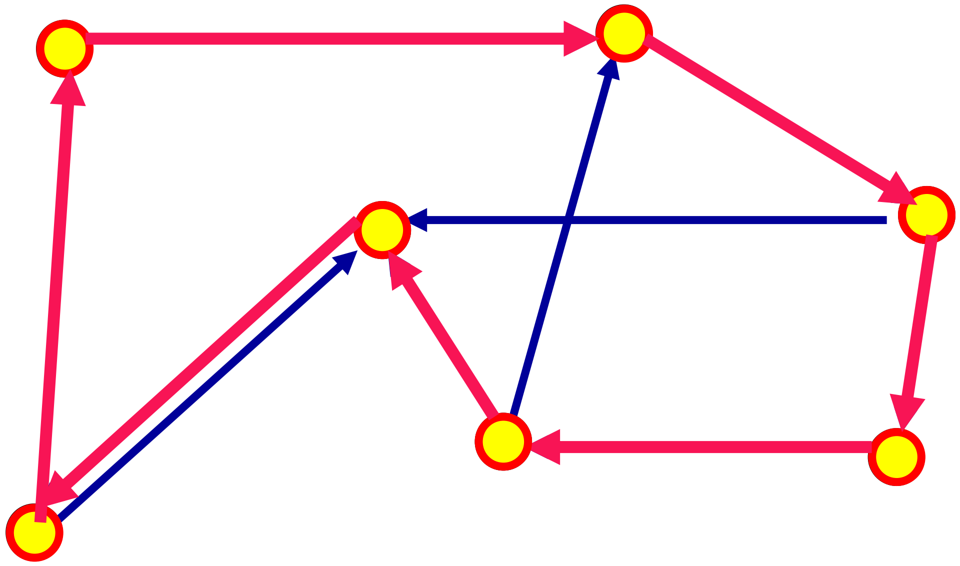
Un **chemin** (ou chaine orientée) est une suite de sommets

$c = [\ x_0\ ,\ x_1\ ,\ \ldots..\ ,\ x_n\ ]$

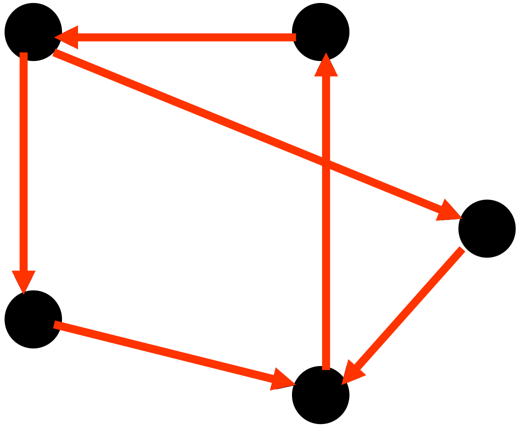
telle que pour tout $i \in \{ 0 , 1 , \ldots , n\text{-}1 \}$

$(x_i , x_{i+1}) \in A$.

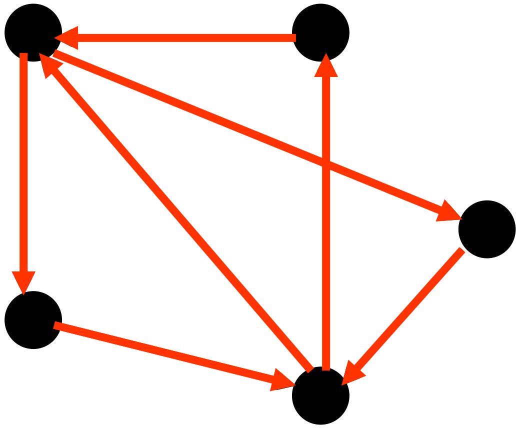
Le chemin c est un **circuit** (ou cycle orienté) lorsque $x_0 = x_n$



- Un chemin est dit eulérien s’il passe une fois et une seule par chaque arête



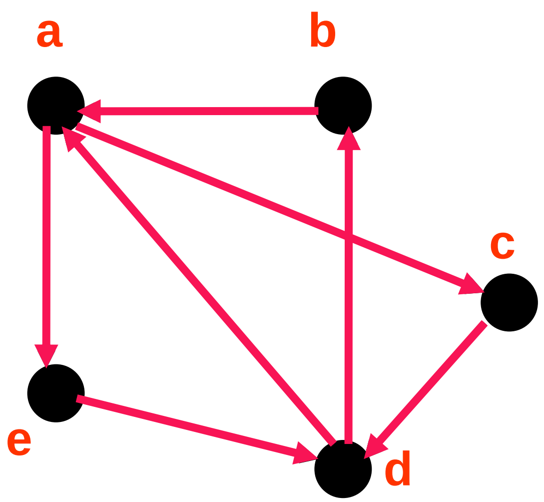
Un graphe orienté est dit eulérien s’il admet un cycle orienté eulérien

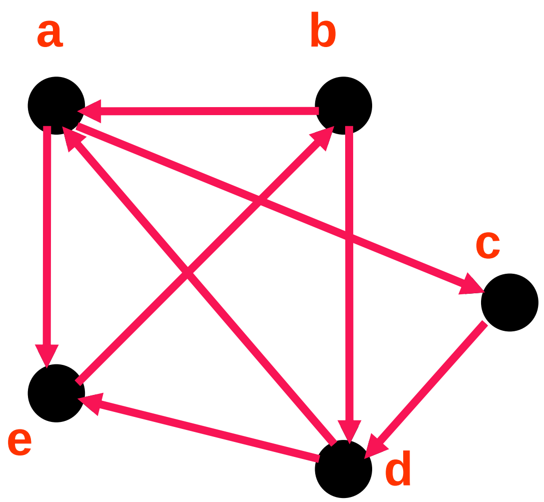


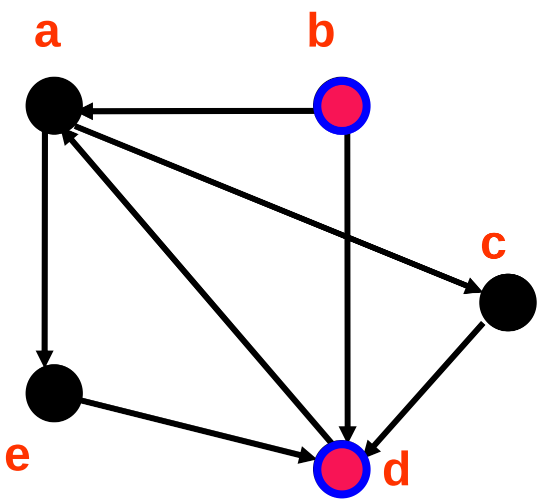
Soit G un graphe connexe orienté

G admet un cycle orienté eulérien si et seulement si pour tout sommet X de G , on a $d^+(x) = d^-(x)$

G admet une chaîne orientée eulérienne qui n’est pas un cycle si et seulement si pour tout sommet X de G , on a $d^+(x) = d^-(x)$, sauf pour deux sommets exactement (A et B) on a d+(A) = d-(A)+1 et d+(B) = d-(B)-1

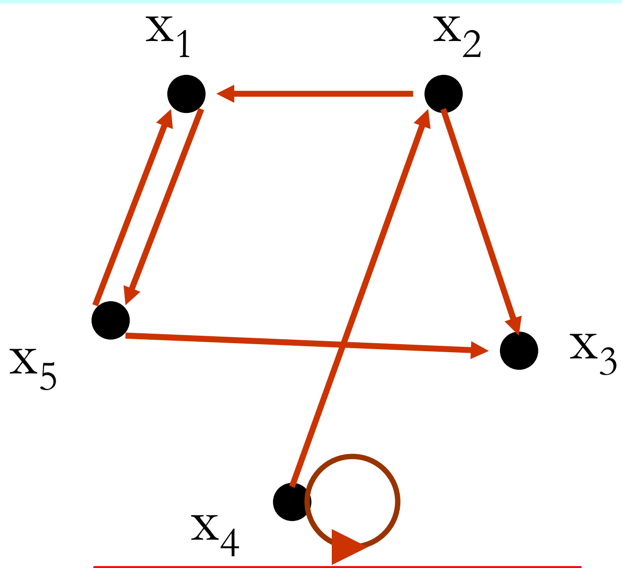






Matrice associée à un graphe

Soit G = (X , A) un graphe orienté avec X = { x_1 , x_2 , … , x_n}.
La matrice associée au graphe G est la matrice M(G) $\in$ Mn(□)
dont les coefficients $m_{(i\ ,\ j)}$ sont définis par :
$m_{(i\ ,\ j)} = 1$ si $(x_i , x_j) \in A$
$m_{(i\ ,\ j)} = 0$ si $(x_i , x_j) \notin A$



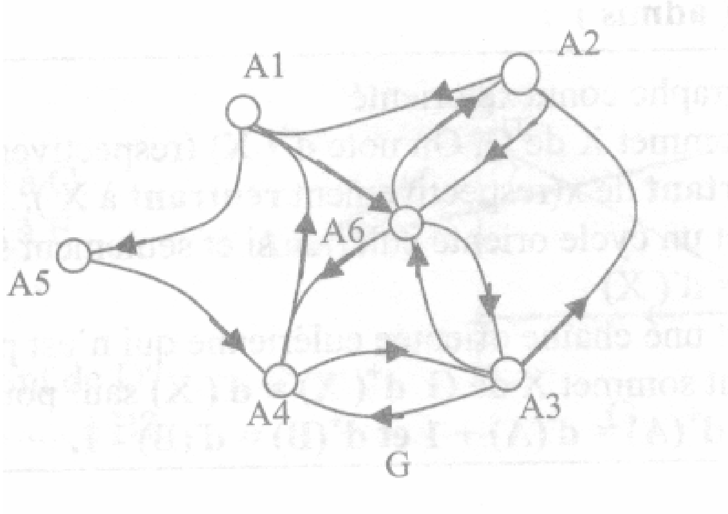
$$\mathbf{M(G)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{d^+(x_i) = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}}$$

$$\boxed{d^-(x_i) = \sum_{j=1}^{n} m_{j,i}}$$

$$\boxed{\sum_{i,j} m_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} d^+(x_i) = \sum_{i=1}^{n} d^-(x_i) = |A|}$$

La matrice associée au graphe G ci-contre est :

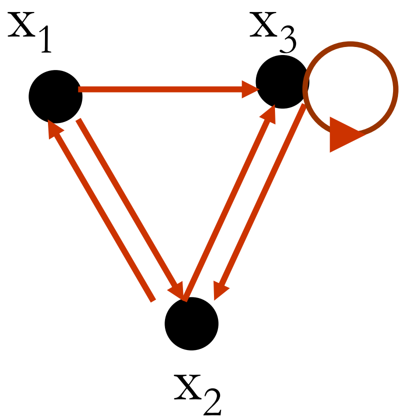


$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} A1 & A2 & A3 & A4 & A5 & A6 \end{array} \\
\begin{array}{c} A1 \\ A2 \\ A3 \\ A4 \\ A5 \\ A6 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Montrer à partir de cette matrice que le graphe G admet une chaîne orientée eulérienne

La longueur d'un chemin c
est l(c) : le nombre d'arcs qui composent le chemin

Soit G = (X , A) un graphe orienté avec X = { x_1 , x_2 , … , x_n} de matrice d'adjacence M = ($m_{i,j}$)
Pour tout entier k non nul, notons $M^k = (m^{(k)}_{i,j})$ alors $m^{(k)}_{i,j}$ est égal au nombre de chemins de longueur k du sommet x_i au sommet x_j .



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^4 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

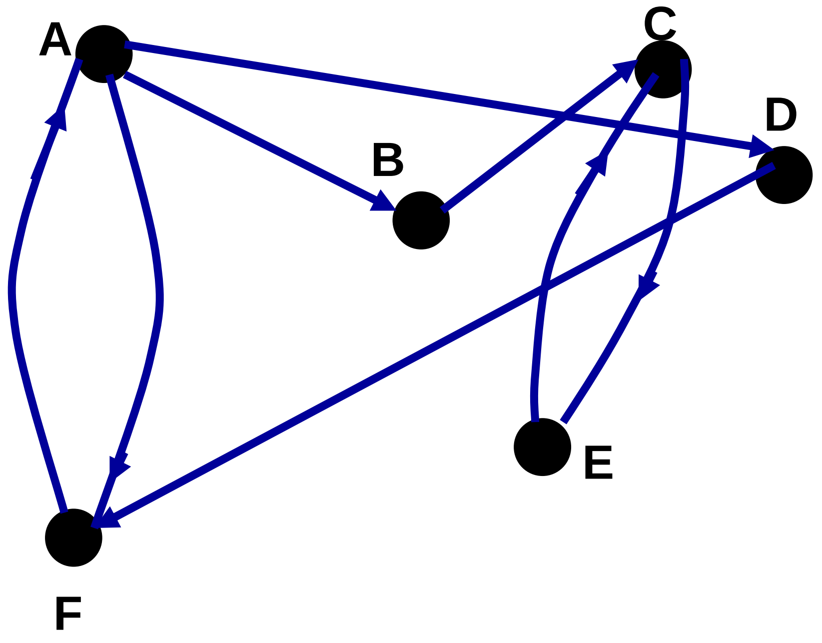
Le nombre de circuits de longueur 4 est la trace de M^4 , tr(M^4)= 17

La distance de deux sommets distincts est la longueur de la plus courte chaîne joignant ces deux sommets.

Le diamètre d’un graphe est la plus grande des distances entre deux sommets du graphe.

La distance entre deux sommets distincts est le plus petit entier naturel n (n > 0) tel que le terme d’indice i,j de la matrice M^n est non nul.

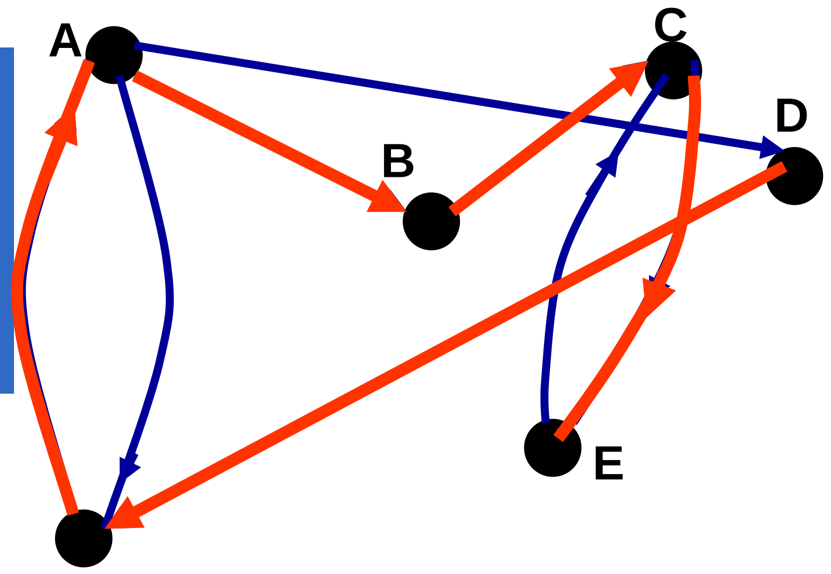
Quel est le plus court chemin pour aller de D à E ?



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M^5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



Conclure !


Bacha