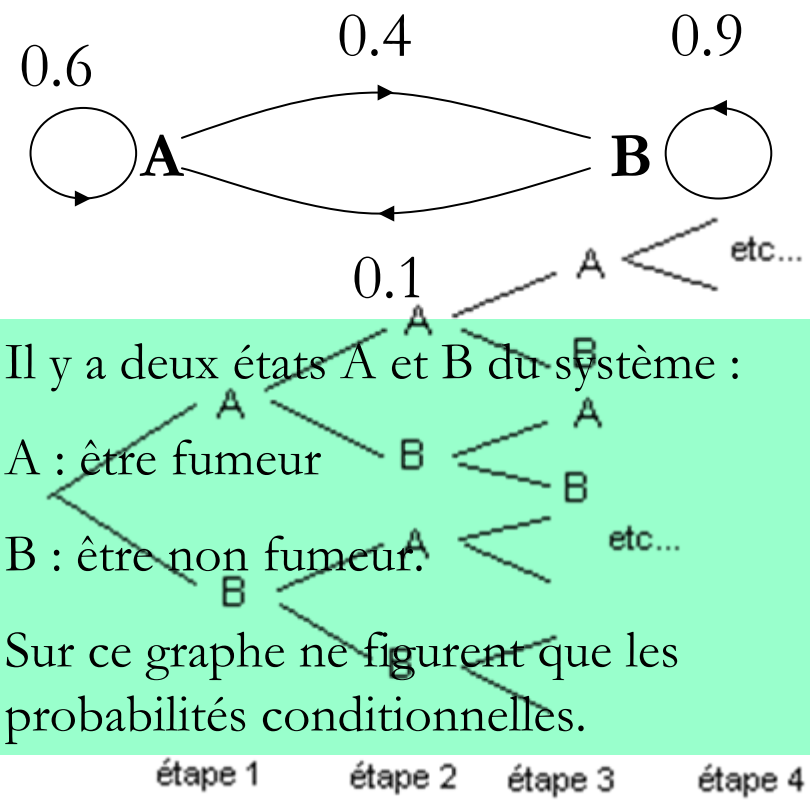
GRAPHES PROBABILISTES

Bacha Samy
CREFOC Radès

Un graphe probabiliste est un graphe orienté, pondéré, tel que les poids figurant sur chaque arête est un nombre réel de l'intervalle [0;1] et la somme des poids des arêtes sortant de chaque sommet est égale à 1.

On a divisé une population en deux catégories :
« fumeurs » et « non-fumeurs ».
- 60% des descendants de fumeurs sont des fumeurs,
- 10% des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.
A la génération 1, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs.

Lorsque l'on répète plusieurs fois une expérience n'ayant que deux issues A et B, indépendantes ou non, on obtient un arbre de probabilités conditionnelles de la forme :



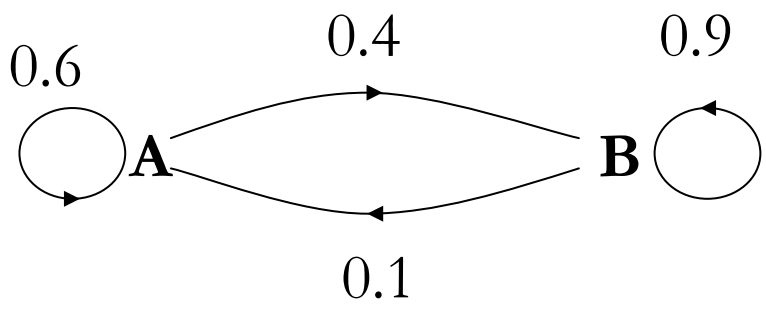
Il y a deux états A et B du système :

A : être fumeur

B : être non fumeur.

Sur ce graphe ne figurent que les probabilités conditionnelles.

…..
- 60% des descendants de fumeurs sont des fumeurs,
- 10% des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.



$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$p(A_{n+1} / A_n)$ $p(B_{n+1} / A_n)$

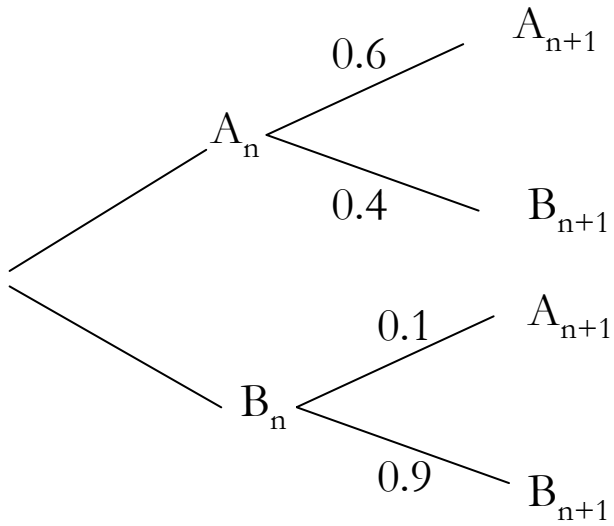
$p(A_{n+1} / B_n)$ $p(B_{n+1} / B_n)$

La **matrice de transition** M du graphe probabiliste est la matrice dont le terme de la ligne i et la colonne j est égal au poids de l'arête allant du sommet i au sommet j , si elle existe, et à 0 sinon.

…..
- 60% des descendants de fumeurs sont des fumeurs,
- 10% des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

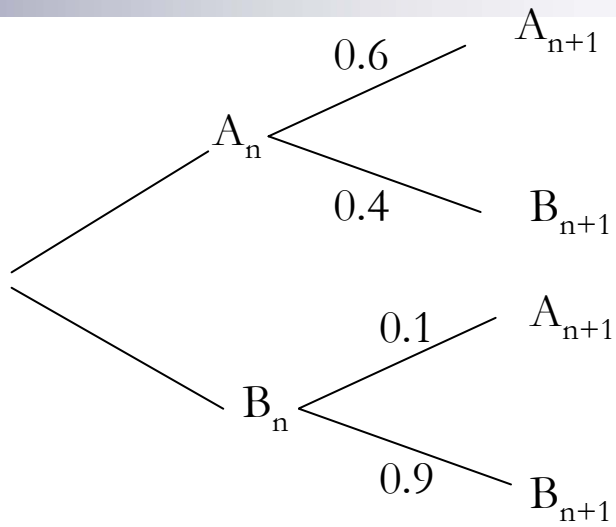
On obtient un arbre de probabilités conditionnelles de la forme :



Lorsqu'on répète n fois l'expérience n'ayant que les issues A et B, on obtient des événements A_n et B_n . On pose $a_n = p(A_n)$ et $b_n = p(B_n)$

L'état de probabilité à l'étape n est donné par la matrice $P_n = (a_n , b_n)$.

…..
- 60% des descendants de fumeurs sont des fumeurs,
- 10% des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.



$a_n + b_n = 1$

$a_{n+1} = p(A_{n+1}) = 0.6.a_n + 0.1.b_n$

$b_{n+1} = p(B_{n+1}) = 0.4.a_n + 0.9.b_n$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Soit M la matrice de transition d'un graphe probabiliste et P_n la matrice décrivant l'état pobabiliste à l'étape n, alors

$P_{n+1} = P_n \times M$ et $P_n = P_1 \times M^{n-1}$ (si l'état initial est P_1)

$a_n + b_n = 1$

$a_{n+1} = p(A_{n+1}) = 0.6.a_n + 0.1.b_n$

$b_{n+1} = p(B_{n+1}) = 0.4.a_n + 0.9.b_n$

A la génération 1, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs.

$a_{n+1} = 0.6.a_n + 0.1.b_n = 0.6.a_n + 0.1.(1 - a_n) = 0.5a_n + 0.1$

Soit $u_n = a_n - 0.2$. (u_n) est géométrique de raison 0.5 ; $a_1 = 0.5$ donc $u_1 = 0.3$ et

$u_n = (0.5)^{n-1} \times 0.3$ et $a_n = 0.2 + (0.5)^{n-1} \times 0.3$

$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = 0.2}$ $\boxed{\lim_{n \to +\infty} b_n = 0.8}$

On pose $P = (a \quad b)$ avec a et b positifs et a+b=1, alors $P \times M = P$ équivaut à

$$(a \quad b) \times \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} = (a \quad b) \text{ d'où } \begin{cases} a + b = 1 \\ 0.6a + 0.1b = a \\ 0.4a + 0.9B = b \end{cases}$$

$\boxed{a = 0.2}$

$\boxed{b = 0.8}$

Létat P_n converge vers un état P indépendant de l'état initial P_1.

Cet état est appelé état stable.

P est l'unique solution de l'équation matricielle $P \times M = P$

AUTRE APPLICATION

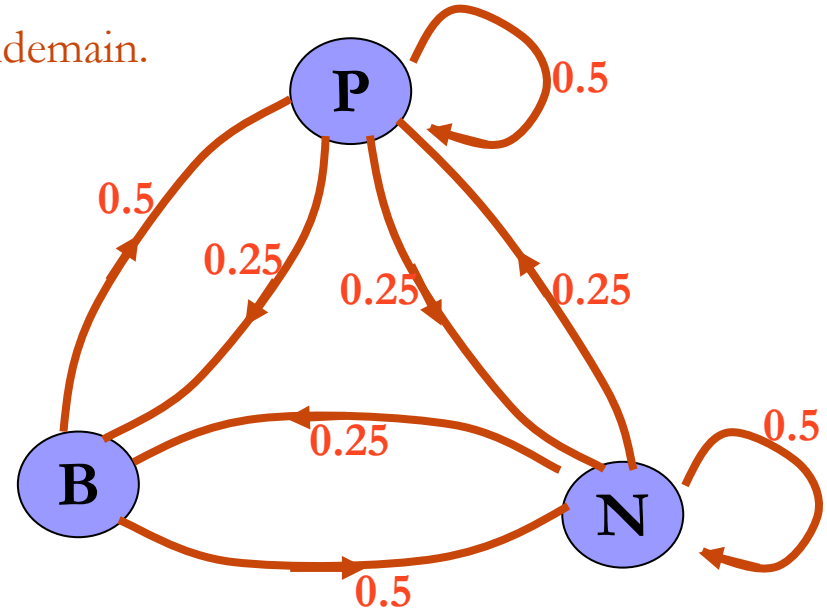
On connaît exactement 3 types de temps :
Pluvieux noté ***P***
Beau temps noté ***B***
Neigeux noté ***N***

S'il fait beau, il ne fera pas beau le lendemain

et il y a autant de chances qu'il pleuve ou qu'il neige le lendemain.

S'il pleut ou s'il neige, il y a une chance sur deux qu'il fasse le même temps le lendemain

et une chance sur quatre qu'il fasse beau le lendemain.



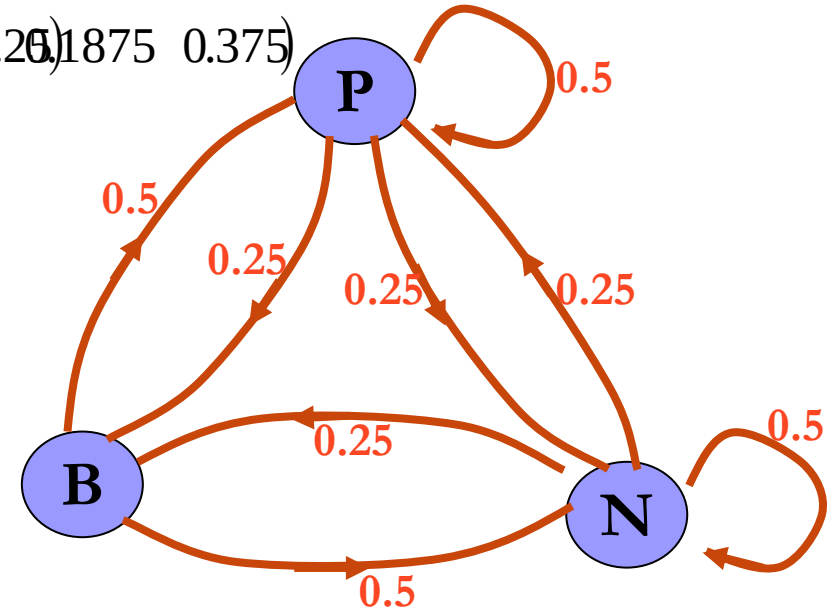
La matrice de transition de ce graphe est : $M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} P & B & N \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ B \\ N \end{array} & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$

Il pleut aujourd'hui.

Quel temps fera-t-il demain?

Et après-demain?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4375 & 0.1875 & 0.375 \end{pmatrix}$$



Quel temps peut-on prévoir à longue échéance ?

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} P & B & N \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ B \\ N \end{array} & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

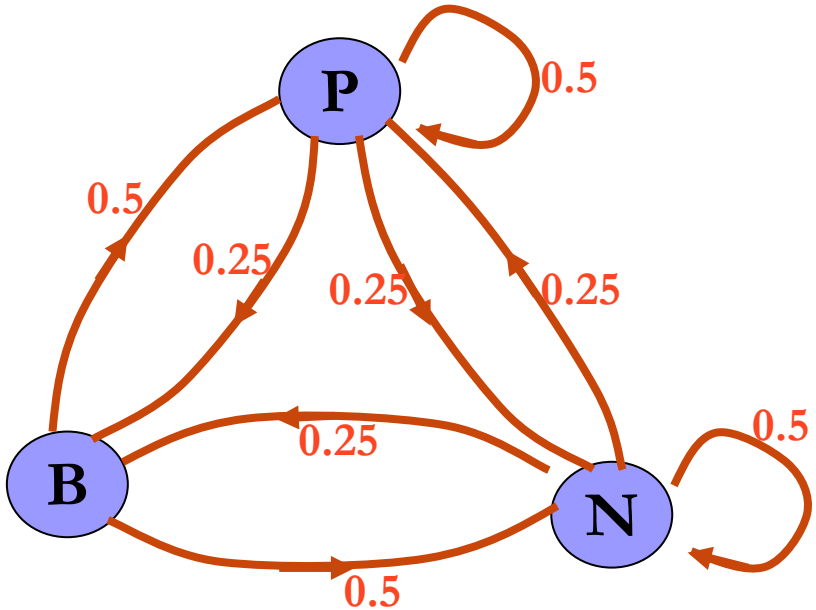
$$\begin{pmatrix} p & b & n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} p & b & n \end{pmatrix}$$

Avec p + b + n = 1

on aboutit à l'état stable :

p = 0.4 **b = 0.2** **n = 0.4**

$$\lim_{n \to +\infty} M^n = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$




Bacha