Exercice :

On considère dans C l'équation (E) :

$z^3 – (21- i) z^2 + (146 – 2i)z – 336 – 48i = 0$

1/ Résoudre (E) sachant qu'elle admet une racine réelle.

2/ Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O , \vec{U} , \vec{V})$ on considère les points A,B, C et D d'affixes respectives $z_A = -6i$, $z_B = 8$, $z_c = 9 – 3i$ et $z_D= 4+ 2i$

a/ placer ces points.

b/ Déterminer la forme exponentielle des nombres : $\frac{z_D - z_A}{z_c - z_A}$ et $\frac{z_D - z_B}{z_c - z_B}$

c/ En déduire que A,B,C et D sont situés sur un même cercle C .

Construire son centre Ω puis construire C.

3/ Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\Pi}{2}$.

a/ montrer que R (C) = D

b/ Déterminer l'expression complexe de R.

c/ En déduire l'affixe de Ω puis le rayon de C.

Problème :

A/ soit la fonction f définie sur$] - \infty ,1 [$par :

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 & \text{si } x < -1 \\ \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} & \text{si } -1 \leq x < 1. \end{cases}$$

1°/ Etudier la continuité de f sur $I=]-\infty .1 [$

2°/ Etudier la dérivabilité de f sur I déterminer sa fonction dérivé f '.

3°/a- Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera

b- Etudier la continuité et la dérivabilité de f^{-1}, réciproque de f, sur J

c)- Déterminer l'expression de $f^{-1} (x)$, $\forall$ $x \in .J$.

4°/ construire dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe C de f.

On précisera les demi- tangentes au point d'abscisse (-1).

5°/Soit $x \in IR$, montrer que l'équation $f(x) = -3x + 2$ admet dans IR une solution unique x_0 puis vérifier que $x_0 \in]-2,1[$

6°/Soit C' la courbe représentative de f^{-1} selon le même repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$

a)Déterminer de deux manières une équation de la tangente à la courbe C' au point d'abscisse $(-\frac{1}{4})$.

b) construire C'.

B) soit la fonction g définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par : $g(x) = f(\sin x) = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

1°/a) Etudier la dérivabilité de g sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et calculer $g'(x)$, $\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

b)Montrer que g réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $]0, +\infty[$

c)Monter que g^{-1} est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que : $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$

2°/ soit la fonction K définie sur $]0, +\infty[$ par : $K(x) = g^{-1}(x) + g^{-1}(\frac{1}{x})$.

a)Montrer que K est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer sa fonction dérivée.

b)En déduire l'expression de K (x) pour $x \in]0, +\infty[$

C/ Soit U et V les suites définies sur IN par : $U_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} g^{-1}(\frac{1}{n+k})$

et $V_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} g^{-1}(n+k)$

1°/ soit pour tout $n \in IN^*$, $k \in \{0,1,......,n\}$

a) Montrer que : $g^{-1}(\frac{1}{2n}) \leq g^{-1}(\frac{1}{n+k}) \leq g^{-1}(\frac{1}{n})$.

b) Montrer que : $g^{-1}(\frac{1}{2n}) \leq U_n \leq g^{-1}(\frac{1}{n})$, $\nabla n \in IN^*$.

2°/a) Déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$