

Exercice :(7 pts)

I- soit dans le plan un triangle ABC quelconque et non isocèle.

D_1, D_2 et D_3 désignent les bissectrices intérieures respectives des secteurs angulaires.

$[BC, BA], [AB, AC]$ et $[CA, CB]$. et I le point de concours des trois droites D_1, D_2 et D_3 .

On pose $h = S_{D_3} \circ S_{D_2} \circ S_{D_1}$

1°/Montrer que $h(I) = I$ et que $h((BC)) = (BC)$

2°/Soit Δ_1 la perpendiculaire à (BC) passant par I et J le projeté orthogonal de I sur (BC) .

a) Montrer que h laisse globalement invariante la droite Δ_1 .

b) Montrer que $h(J) = J$

c) Dédurre alors la nature de h.

II- On suppose que le triangle ABC est isocèle en A.

Soit f une isométrie du plan vérifiant $f(B) = C$ et $f(C) = B$.

1°/On suppose que $f(A) = A$; montrer que dans ce cas f n'est autre qu'une symétrie axiale dont on précisera l'axe.

2°/On suppose que $f(A) = A'$ avec $A' \neq A$.

a) Montrer que $J = A * A'$.

b) Soit $g = f \circ S_{(BC)}$.

Vérifier que g fixe les points J et A' . En déduire f.

3°/ Déterminer alors toutes les isométries du plan transformant B en C et C en B.

Problème : (13pts)

A/ soit la fonction f définie sur $]-\infty, 1[$ [par :

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 & \text{si } x < -1 \\ \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} & \text{si } -1 \leq x < 1. \end{cases}$$

1°/ Etudier la continuité de f sur $I =]-\infty, 1[$

2°/ Etudier la dérivabilité de f sur I déterminer sa fonction dérivée f'.

3°/a- Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera

b- Etudier la continuité et la dérivabilité de f^{-1} , réciproque de f, sur J

c)- Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$, $\forall x \in J$.

4°/ construire dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe C de f.

On précisera les demi-tangentes au point d'abscisse (-1).

5°/ Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que l'équation $f(x) = -3x + 2$ admet dans \mathbb{R} une solution unique x_0 puis vérifier que $x_0 \in]-2, 1[$

6°/ Soit C' la courbe représentative de f^{-1} selon le même repère (o, \vec{i}, \vec{j})

a) Déterminer de deux manières une équation de la tangente à la courbe C' au point

d'abscisse $(-\frac{1}{4})$.

b) construire C'.

B) soit la fonction g définie sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ par : $g(x) = f(\sin x) = \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$

1°/a) Etudier la dérivabilité de g sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ et calculer $g'(x)$, $\forall x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$

b) Montrer que g réalise une bijection de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ sur $] 0, +\infty [$

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $] 0, +\infty [$ et que : $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$

2°/ soit la fonction K définie sur $] 0, +\infty [$ par : $K(x) = g^{-1}(x) + g^{-1}(\frac{1}{x})$.

a) Montrer que K est dérivable sur $] 0, +\infty [$ et déterminer sa fonction dérivée.

b) En déduire l'expression de K(x) pour $x \in] 0, +\infty [$

C/ Soit U et V les suites définies sur \mathbb{N} par : $U_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n g^{-1}(\frac{1}{n+k})$

et $V_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n g^{-1}(n+k)$

1°/ soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

a) Montrer que : $g^{-1}(\frac{1}{2n}) \leq g^{-1}(\frac{1}{n+k}) \leq g^{-1}(\frac{1}{n})$.

b) Montrer que : $g^{-1}(\frac{1}{2n}) \leq U_n \leq g^{-1}(\frac{1}{n})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2°/a) Déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$