

Exercice 1 : Q-C-M (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse correcte vaut 0,5 point, une réponse fautive ou (absence de réponse) vaut 0 point.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

- 1) $e^{\frac{i\pi}{3}} + e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est égale à
 - a $e^{i\pi}$
 - b 1
 - c $i\sqrt{3}$
- 2) Une solution de l'équation $2z + \bar{z} = 9 + i$ est :
 - a 3
 - b i
 - c $3 + i$
- 3) L'ensemble des solutions dans \mathbb{C} de l'équation $\frac{z-2}{z-1} = z$ est :
 - a $\{1-i\}$
 - b L'ensemble vide
 - c $\{1-i; 1+i\}$
- 4) Soit n un entier naturel. Le complexe $(\sqrt{3} + i)^n$ est un imaginaire si et seulement si :
 - a $n = 3$
 - b $n = 6k+3$ avec k entier relatif
 - c $n = 6k$ avec k entier relatif
- 5) L'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z| = z$ est :
 - a Une droite
 - b Un cercle
 - c Une demi-droite
- 6) Les racines carrées de $\frac{2}{i}$ sont :
 - a $\frac{\sqrt{2}}{i}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{i}$
 - b $1-i$ et $-1+i$
 - c $\sqrt{2}i$ et $-\sqrt{2}i$

Exercice 2 : (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un losange ABCD tel que $AB = BC = CD = DA = 5$ et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3}$

On désigne par I, J, K, L, et O les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA] et [BD].

On note (Δ) la médiatrice de [AB] et (Δ') la médiatrice de [CD].

- 1) Soit f l'isométrie du plan définie par : $f(A) = B$, $f(B) = D$ et $f(D) = C$.
 - a) Prouver que f est un antidéplacement.
 - b) Démontrer que, s'il existe un point M invariant par f , alors M est équidistant des points A, B, C, D.
 - c) L'isométrie f admet-elle un point invariant ?
- 2) Soit σ la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et r la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
 - a) Démontrer que $f = r \circ \sigma$
 - b) A-t-on $f = \sigma \circ r$?

- 3) Soit S_1 la symétrie orthogonale d'axe (BC).
- a) Déterminer l'axe de la symétrie orthogonale S_2 telle que $r = S_1 \circ S_2$.
- b) En déduire que f peut s'écrire sous la forme $f = S_1 \circ t_1$, où t_1 est une translation que l'on précisera.
- 4) Soit t_2 la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overline{AD}$; on note t_2^{-1} sa réciproque et on pose $g = t_2^{-1} \circ f$
- a) Déterminer $g(D)$, $g(I)$, $g(O)$. En déduire la nature précise de la transformation g .
- b) Démontrer que $f = t_2 \circ g$. A-t-on $f = g \circ t_2$?

Exercice 3 : (4 points)

On considère la fonction Φ définie sur $[0, \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$ par $\Phi(x) = \tan x - x$

1) Étudier les variations de Φ et en déduire le signe de $\Phi(x)$.

2) Soit la fonction f définie \mathbb{R} sur par $\begin{cases} f(x) = x \sin \frac{\pi}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

- a) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
- b) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}^* et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a : $f'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \Phi\left(\frac{\pi}{x}\right)$.
- c) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = 0$.
- 3) Soit g la restriction de f à $[1; +\infty[$ et (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- a) Montrer que g est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.
- b) Montrer que g réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur $[0; \pi[$
- (On notera g^{-1} sa fonction réciproque et (Γ) sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}))
- c) Déterminer l'intersection de (\mathcal{C}) et la droite d'équation $y = x$.
- d) Tracer (\mathcal{C}) et (Γ) (On précisera la demi tangente à la courbe (\mathcal{C}) au point d'abscisse 1)

Exercice 4 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par : $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - x$

- 1) a) Montrer que f est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^*
- b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans \mathbb{R}_+^* une unique solution x_0 et vérifier que

$$1 < x_0 < 2$$

2) On considère la fonction g définie sur $[1; 2]$ par : $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

On définit, pour tout entier naturel n , la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

a) Montrer que g est dérivable sur $[1; 2]$ et que pour tout $x \in [1; 2]$ on a : $g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$

En déduire que g est croissante sur $[1; x_0]$ et décroissante sur $[x_0; 2]$.

b) Montrer que x_0 est le seul point fixe de g , et résoudre l'inéquation : $g(x) \geq x$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq x_0$

d) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

3) a) Montrer que pour tout x de $[1; 2]$, on a : $|f'(x)| \geq 1; |f(x)| \leq 1$ et $|f''(x)| \leq \frac{3}{4}$

b) Montrer que, si $1 \leq x \leq 2$: $|g'(x)| \leq \frac{3}{4}$

4) a) En appliquant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout entier n :

$$|u_{n+1} - x_0| \leq \frac{3}{4} |u_n - x_0|$$

b) Montrer que, pour tout entier n : $|u_n - x_0| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

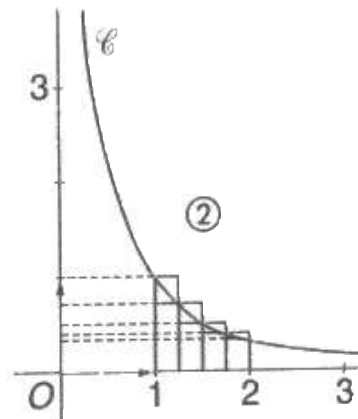
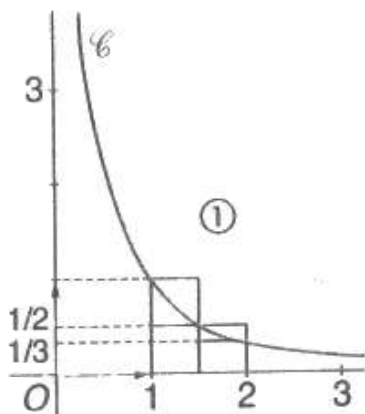
c) Calculer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 5 : (4 points)

Soit (\mathcal{C}) la représentation graphique de

la fonction inverse $(x \mapsto \frac{1}{x})$ sur l'intervalle

$]0; +\infty[$.



○

1) Par une argumentation graphique, si \mathcal{A} désigne l'aire comprise entre la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$ justifier, à l'aide du graphique

$$\text{l'encadrement } \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{3} \right)$$

2) À l'aide du graphique $\textcircled{2}$, déterminer l'encadrement de \mathcal{A} obtenu et justifier graphiquement.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on partage l'intervalle $]0; 1]$ en n segments de longueur $\frac{1}{n}$

On désigne par :

• \mathcal{A}_n la somme des aires des rectangles situés en-dessous de la courbe \mathcal{C} .

• \mathcal{A}'_n la somme des aires des rectangles situés au-dessus de la courbe \mathcal{C} .

a) Montrer que pour tout $n \geq 2$ on : $\mathcal{A}_n \leq \mathcal{A} \leq \mathcal{A}'_n$ et $\mathcal{A}_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$

$$\text{et } \mathcal{A}'_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n-1}$$

b) Vérifier que $\mathcal{A}'_n = \mathcal{A}_n + \frac{1}{2n}$ où : $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n + \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$

c) Démontrer que les suites (\mathcal{A}_n) et (\mathcal{A}'_n) sont adjacentes et convergent vers \mathcal{A}

d) Déterminer à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de \mathcal{A} à 10^{-1} près.

