

Lycée Tataouine

Classe : 4<sup>ème</sup> Math 2

Professeur : Amor Etteyeb

Devoir de Synthèse N° 2

Mathématiques

Durée : 4 heures

## PROBLEME 1

### Partie A°

On considère un carré ABCD de centre O tel que :  $(\overline{AB}, \overline{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$  et  $AB = 10$ .

Soit  $E = B * C$ ,  $J = D * C$  et  $I = J * D$ .

On note R la rotation de centre O et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{2}$  et h l'homothétie de centre J et de rapport 2.

1/ On considère l'application  $S = R \circ h$ .

- Déterminer  $S(I)$  et  $S(O)$ .
- Montrer que S est une similitude directe dont on déterminera le rapport et une mesure de son angle.
- Prouver que les droites (OI) et (AE) sont perpendiculaires et que  $AE = 2 OI$ .
- Construire le centre  $\Omega$  de S.

2/ On pose  $K = J * E$ .

- Montrer que  $S(K) = J$  et  $S(J) = H$  ou  $H = A * D$ .
- En déduire que les points K,  $\Omega$  et H sont alignés.

3/ a) En utilisant la similitude  $S'(\Omega, 2, \frac{\pi}{2})$ ; déterminer les images des droites (OE) et (JE) par S.

- Construire le point  $F = S(E)$ .
- Déterminer l'image du carré OECJ par S.
- En déduire le point  $G = S(C)$ .

### Partie B°

Dans cette partie on fera une figure à part

1/ Montrer qu'il existe un seul antidéplacement f tel que :  $f(F) = D$  et  $f(H) = B$ .

2/ Déterminer les éléments caractéristiques de f (on remarque que le point  $F * H$  est un point de l'axe de f).

3/ On pose  $g = f \circ S$ .

- Montrer que g est une similitude indirecte de rapport 2.
- Déterminer  $g(J)$  et  $g(E)$ .

c) Déterminer  $g(C)$ , en déduire que  $C$  est le centre de  $g$ .

Montrer que la droite  $(AC)$  est l'axe de  $g$ .

### Partie C°

Soit  $\xi_1$  le cercle de centre  $O$  et passant par  $\Omega$  et  $\xi_2$  le cercle de centre  $E$  et passant par  $\Omega$ .  $\xi_1$  et  $\xi_2$  se coupent en  $L$ .

1/ Déterminer l'image du cercle  $\xi_1$  par  $S$ .

2/ Soit  $M$  un point du cercle  $\xi_1$  et  $M' = S(M)$ .

a) Montrer que  $M, L$  et  $M'$  sont alignés.

b) Soit  $M'' = M * M'$ . Déterminer et construire l'ensemble des points  $M''$  lorsque  $M$  décrit le cercle  $\xi_1$ .

### Partie D°

1/ Construire le point  $N$  tel que  $S(N) = L$ .

2/ Construire le point  $L' = S(L)$ .

3/ Prouver que  $O = L * N$  et  $E = L * L'$ . Montrer que  $(LE)$  et  $(OL)$  sont perpendiculaires.

4/ Montrer que les points  $L, O$  et  $I$  sont alignés.

## Problème 2

### Partie A°

Soit  $f$  la fonction définie par sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \text{Log}(1 + e^{-x})$ .

1) Étudier les variations de  $f$ .

2) Soit  $g$  la fonction définie par :  $g(x) = f(x) + x$ .

a - Étudier les variations de  $g$ .

b - En déduire le signe de  $g$  pour tout  $x > 0$ .

3) a- Montrer que la courbe  $(C)$  de  $f$  admet une asymptote oblique  $(D)$  et étudier la position de  $(C)$  par rapport à  $(D)$ .

b- Tracer  $(C)$  dans un repère orthonormé.

4) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et expliciter sa réciproque  $f^{-1}$ .

### Partie B°

On considère la suite  $V$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $V_0 = 0$  et  $V_{n+1} = g(V_n)$

1) Calculer  $V_1$  et  $V_2$

2) On pose  $W_n = e^{V_n}$

a- Calculer  $W_0, W_1$  et  $W_2$ .

b- Montrer  $(W_n)$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

3) Calculer  $W_n$  en fonction de  $n$  puis en déduire  $V_n$  en fonction de  $n$ .

### Partie C°

1) Montrer que pour tout  $t \geq 0$  on a :  $t - \frac{t^2}{2} \leq \text{Log}(1+t) \leq t$ .

2) En déduire que pour tout réel  $x$  on a :  $e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} \leq f(x) \leq e^{-x}$ .

3) Soit la suite  $U$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $U_1 = 1 + \frac{1}{e}$  et pour tout  $n \geq 1$  on a :  $U_{n+1} = U_n \left(1 + \frac{1}{e^{n+1}}\right)$ .

a - Montrer que pour tout  $n \geq 1$  on a :  $U_n > 0$ .

b - Montrer que la suite  $U$  est une suite croissante.

4) a - Montrer que pour tout  $n \geq 1$ , on a :  $\text{Log}(U_n) = \sum_{p=1}^n f(p)$ .

b - On pose :  $S_1 = \sum_{p=1}^n \frac{1}{e^p}$  et  $S_2 = \sum_{p=1}^n \frac{1}{e^{2p}}$ . Montrer que :  $S_1 - \frac{1}{2} S_2 < \text{Log } U_n < S_1$ .

5) a- Montrer que la suite  $U$  est une suite convergente, et soit  $\ell$  sa limite.

b- Montrer que :  $\frac{2e+1}{2(e^2-1)} \leq \text{Log } \ell \leq \frac{1}{e-1}$