Lycée secondaire Assad Ibn El Fourat	Devoir de synthèse N°2	4éme Maths
	Durée : 4 H	02 /03/2004

Exercice N°1 : (3 pts)

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1-a- Déterminer la forme complexe de la similitude directe S vérifiant : S (A) = O et S (B) = B' avec A (i), B ($\sqrt{3}$) et B' (-4i).

b)- Préciser le centre, le rapport et l'angle de S.

2 - Déterminer alors l'ensemble $C = \left\{ M(Z), tel\ \ que : \left|(1-i\sqrt{3})Z - \sqrt{3} - i\right| = 4 \right\}$

Exercice N°2 (7 pts)

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$, S la similitude directe de centre A qui transforme B en C.

1- Déterminer l'angle et le rapport de S.

2- Soit ζ et ζ ' deux cercles passant par A et de centres respectives B et C. Les cercles ζ et ζ ' se recoupent en D.

a- vérifier que S(ζ) = ζ '.

b- Montrer que $[AD]$ est un diamètre de ζ .

En déduire une construction du point D'=S (D).

3- Soit M$\in \zeta \setminus \{A, D\}$ et M'= S (M).

a- Montrer que D, M et M' sont alignés.

b-En déduire que A M M'est rectangle en M.

4-Soit f = S0R $_{(B,\frac{2\pi}{3})}$

a- Déterminer f (B).

b-. Montrer que f est une homothétie que l'on caractérisera.

5-Soit Δ la médiane de [AC] et g = S $_{\Delta}0S$.

a- Montrer que g admet un seul point invariante noté Ω .

b- Déterminer g (A) et g (B).

c- Montrer que le point Ω est le barycentre des points pondérés (C, 1) et (B,-4).

d- Donner la forme réduite de g.

Problème : (10pts)

A) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par g(x) = (1-x) e^x- Log x + 1.

1-a-Montrer que g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

b- Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$.

Vérifier que : $1,2 \langle \alpha \langle 1,3$

c- Déterminer alors le signe de g(x) pour tout x $\in$ $]0,+\infty[$.

2) - Soit f la fonction définie $sur [0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{e^x - Logx} & si\ \ x \succ 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et ξ sa courbe représentative selon un repère orthonormé (O , $\vec{i}, \vec{j}$) :(unité graphique 4cm)

a- Etudier la continuité de f à droite en 0.
b- Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat.

2-a- Montrer que f'(x) = $\dfrac{g'(x)}{(e^x - Logx)^2}$ pour tout x$\in \left]0,+\infty\right[$.

b- Dresser le tableau de variation de f.

3- Tracer ξ .

B) On considère la suite (U_n) définie sur IN* par :

$U_n = \int_1^n f(x)dx$

1- Montrer que la suite U est croissante sur IN*

2-a- Montrer que pour tout x $\in \left]0,+\infty\right[$ on a :

$e^x \geq x+1$ et Log x $\leq x-1$ en déduire que e^x –Log x ≥ 2 pour tout x $\in \left]0,+\infty\right[$.

b- soit h(x)= e^x – (x+1) Log x ; x $\in \left[1,+\infty\right[$

Montrer que h' (x) ≥ 0 *pour tout* $x \in \left[1,+\infty\right[$.

En déduire que h(x) ≥ 0, pour tout x $\in \left[1,+\infty\right[$.

c- Montrer alors que pour tout x $\in \left[1,+\infty\right[$: f(x) $\leq \dfrac{1+x}{e^x}$

d- Montrer que pour tout x $\in \left[1,+\infty\right[$: f(x) $\geq xe^{-x}$

3- On pose $I_n = \int_1^n xe^{-x}dx$ et $J_n = \int_1^n (1+x)e^{-x}dx$

a- En effectuant une intégration par parties, calculer I_n fonction de n puis déduire J_n.

b- Montrer que $I_n \leq U_n \leq J_n \quad \forall n \in IN^*$

1- a- Montrer que la suite U est majorée
b-En déduire que U est convergente

c- Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$, Montrer que $\dfrac{2}{e} \leq \ell \leq \dfrac{3}{e}$.