

**Exercice n°1 : ( 5 pts)**

Un sac contient 6 jetons indiscernables au toucher, réparties comme suit :  
2 rouges, 3 blancs et 1 noir.

- I. On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac.
  - a) déterminer la probabilité d'avoir 3 jetons de même couleur.
  - b) déterminer la probabilité d'avoir 3 jetons tricolores.
  - c) Sachant qu'on a tiré le jeton noir ; calculer la probabilité d'avoir exactement deux couleurs.
- II. Soit l'épreuve suivante : on tire simultanément 2 jetons du sac :
  - Si les 2 jetons tirés sont blancs ; on garde un jeton et on remet l'autre dans le sac puis on tire un 2<sup>ème</sup> jeton.
  - Si non ; on remet les 2 jetons dans le sac et on tire successivement et sans remise 2 jetons du sac.

Soit  $Y$  : l'aléa numérique qui associe le nombre de jetons blancs à la fin du jeu

1° a) Montrer que  $P[Y=1] = \frac{3}{5}$

b) Déterminer la loi de probabilité de  $Y$ .

2° Un jeu consiste à répéter l'épreuve précédente 5 fois de suite en remettant à chaque fois les jetons tirés dans le sac.

Calculer la probabilité des événements :

$H$  : Obtenir exactement 2 fois  $[Y=1]$

$I$  : Obtenir  $[Y=1]$  pour la première fois au 3<sup>ème</sup> tirage.

**Exercice n°2 : ( 5 pts)**

On considère dans le plan deux points fixes  $A$  et  $F$  et deux droites  $D_1$  et  $D_2$  perpendiculaires et passant par  $A$  et ne passant pas par  $F$   
( $P$ ) est une parabole de foyer  $F$  et tangentes à  $D_1$  et  $D_2$ .

1/ On suppose que  $D_1$  et  $D_2$  sont fixes

Construire la directrice  $\Delta$  de la parabole ( $P$ ).

2/ On suppose que  $A$  et  $F$  restent fixes et les droites  $D_1$  et  $D_2$  tournent autour de  $A$  en restant perpendiculaires, ( $P$ ) varie.

Montrer que  $\Delta$  la directrice de ( $P$ ) passe par  $A$ .

3/ Soit  $M$  un point donné du plan.

On considère les paraboles  $\mathcal{T}$  passant par  $M$  et de foyer  $F$ .

Construire les directrices passant par  $A$  des paraboles  $\mathcal{T}$  (discuter)

4/ Soit ( $E$ ) une ellipse dont l'un des foyers est  $F$  et tangente à  $D_1$  et  $D_2$ .

Montrer que l'axe non focal de ( $E$ ) est tangent à une parabole ( $\mathcal{P}$ ) de foyer  $F$  dont on précisera la directrice

**Problème : (10 pts)**

**Partie A**

I. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x-1)e^{(2-x)}$ .

$C$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Etudier les variations de  $f$  puis construire sa courbe  $C$ .

2) a- Soit  $\alpha \in ]1, +\infty[$ .

Calculer l'aire  $A(\alpha)$  de la partie du plan limitée par  $C$  et les droites d'équations :  
 $y=0$ ,  $x=1$  et  $x=\alpha$

b- Calculer la limite de  $A(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  tend vers  $+\infty$ .

II. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$   $g_n$  la fonction définie sur  $]1, +\infty[$  par :  $g_n(x) = (x-1)^n e^{(2-x)}$

et  $C_n$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1) a- Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = 0$

b- Dresser le tableau de variation de  $g_n$  (on distinguera les cas  $n$  pair et  $n$  impair)

c- En déduire que pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ , on a :  $0 \leq g_n(x) \leq e^{1-n} n^n$

2) a- Etudier la position relative de  $C_2$  par rapport à la courbe  $C$  de  $f$ .

b- Construire  $C_2$ .

**Partie B**

$f_n : ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f_n(x) = \frac{1}{g_n(x+2)} = \frac{e^x}{(x+1)^n}$$

1. Montrer que pour tout  $x > -1$   $f_n'(x) = f_n(x) - n f_{n+1}(x)$

2. Pour tout entier naturel non nul  $n$  on pose :  $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$

3. Montrer que  $I_n$  est décroissante et qu'elle est convergente.

4. a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$   $\frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq I_n \leq \frac{e}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$

b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

5. a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_n = n I_{n+1} - 1 + \frac{e}{2^n}$

b) Déterminer alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_{n+1}$  et en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n$

**Partie C**

Soit  $F$  la fonction définie sur  $]1, +\infty[$  par  $F(x) = \int_x^{x+1} \frac{f(t)}{(t-1)^2} dt = \int_x^{x+1} \frac{e^{2-t}}{t-1} dt$

1/ a) Montrer que la fonction  $F$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  et que

$$F'(x) = \frac{e^{1-x}[(e-1)x+1]}{x(1-x)}$$

b) En déduire le sens de variation de F sur  $]1, +\infty[$ .

2/ a) A l'aide de la fonction f montrer que  $0 \leq \frac{e^{2-t}}{t-1} \leq \frac{1}{(t-1)^2}$  pour  $t \in ]1, +\infty[$

b) En déduire que pour tout  $x \in ]1, +\infty[$  on a

$$0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x(x-1)} \text{ calculer alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$$

3/ a) Montrer que pour tout  $x \in ]1, 2]$  et pour tout  $t \in [x, x+1]$  on a :  $\frac{e^{2-t}}{t-1} \geq \frac{e^{2-x}}{t-1}$

b) En déduire que  $F(x) \geq e^{(1-x)} [\text{Log}x - \text{Log}(x-1)]$  puis calculer  $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$

c) Dresser le tableau de variation de F