LYCEE : IBN ABI DHIAF MANOUBA
EPREUVE DE :

MATHEMATIQUES

DEVOIR DE SYNTHESE N°3

CLASSE : 4ème MATHEMATIQUES 1 & 3

ANNEE SCOLAIRE : 2008 -2009

DUREE : 4 HEURES * DATE : 07 - 05 - 2009

Exercice 1 (4 pts)

A/ Dans un pays , le montant des recettes touristiques, exprimées en millions de dinars , est donné dans le tableau ci dessous :

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
Montant des recettes touristiques y_i en millions de dinars	24 495	26 500	29 401	33 299	33 675	34 190

1) On utilise un ajustement affine. Donner, à l'aide de la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.
Les coefficients, obtenus à l'aide de la calculatrice, seront arrondis au centième.
2) En supposant que cet ajustement est valable jusqu'en 2010, calculer le montant que l'on peut prévoir pour les recettes touristiques de l'année 2010, arrondi au million de dinars.
B/ On considère la fonction f définie pour tout nombre entier n par $f(n) = e^{10,13 + 0,07n}$.
On utilise cette fonction pour modéliser l'évolution des recettes touristiques de ce pays.
Ainsi f(n) représente le montant des recettes touristiques (exprimés en millions de dinars) de ce pays pour l'année 2000 + n.
1) Selon ce modèle, calculer le montant des recettes touristiques que l'on peut prévoir pour l'année 2010. Arrondir le résultat au million de dinars
2) a. Déterminer le nombre entier n à partir duquel $f(n) > 45\,000$.
b. En déduire l'année à partir de laquelle, selon ce modèle, le montant des recettes touristiques dépasserait 45 000 million de dinars .

Exercice 2 (4 pts)

On a posé à 1 000 personnes la question suivante : « Combien de fois êtes-vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois ? ». Les réponses ont été regroupées dans le tableau suivant :

Nombre de retards le 1er mois / Nombre de retards le 2ème mois	0	1	2 ou plus	Total
0	262	212	73	547
1	250	73	23	346
2 ou plus	60	33	14	107
Total	572	318	110	1000

1. On choisit au hasard un individu de cette population.
a. Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le premier mois,
b. Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le deuxième mois sachant qu'il n'en a pas eu le premier mois.
2. On souhaite faire une étude de l'évolution du nombre de retards sur un grand nombre n de mois (n entier naturel non nul). On fait les hypothèses suivantes :
– si l'individu n'a pas eu de retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois n+1 est 0,46.
– si l'individu a eu exactement un retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois n+1 est 0,66.
– si l'individu a eu deux retards ou plus le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois n+1 est encore 0,66.
On note A_n, l'évènement « l'individu n'a eu aucun retard le mois n, B_n, l'évènement « l'individu a eu exactement un retard le mois n », C_n, l'évènement « l'individu a eu deux retards ou plus le mois n ».
Les probabilités des évènements A_n, B_n, C_n sont notées respectivement p_n, q_n et r_n.
a. Pour le premier mois (n = 1), les probabilités p_1, q_1 et r_1 sont obtenues à l'aide du tableau précédent. Déterminer les probabilités p_1, q_1 et r_1.
b. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n, q_n, et r_n. On pourra s'aider d'un arbre.
c. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -0{,}2\, p_n + 0{,}66$.
d. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - 0{,}55$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
e. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

<u>Exercice 3</u> (4 pts)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A(1,0) et B$(-1, \sqrt{3})$, B'$(-1, -\sqrt{3})$ et $\Omega(-1, 0)$. Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse de centre Ω et de sommets B , B'et passant par A .
1. Montrer que A est un sommet de $(\mathcal{E})$.
2. Déterminer les foyers F et F' , l'excentricité **e** et les directrices associées $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ de $(\mathcal{E})$.
3. Démontrer que $(\mathcal{E})$ à pour équation cartésienne : $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.
4. Déterminer les points M_1 et M_2 d'intersection de (E) et l'axe des ordonnées. Tracer $(\mathcal{E})$.
5. a) Ecrire une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{E})$ en M_1 d'ordonnée positive.
b) Soit H et H' les projetés orthogonaux respectivement des foyers F et F' sur (T).
Montrer que FH**.** F'H'= 3

<u>Exercice 4</u> (8 pts)

<u>A/</u> On donne un entier naturel *n* strictement positif, et on considère l'équation différentielle :

$$(E_n)\quad y' + y = \frac{x^n}{n!}e^{-x}.$$

1. On fait l'hypothèse que deux fonctions *g* et *h*, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout *x* réel :

$$g(x) = h(x)e^{-x}.$$

a. Montrer que *g* est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout *x* réel, $h'(x) = \frac{x^n}{n!}$.
b. En déduire la fonction *h* , sachant que $h(0) = 0$. Quelle est alors la fonction *g* ?
2. Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
a. Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation : (F) y' + y = 0.
b. Résoudre (F).
c. Déduire la solution φ de l'équation (E_n) vérifiant $\varphi(0) = 0$.

B/ Le but de cette partie est démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e$.

1. On pose, pour tout *x* réel, $f_0(x) = e^{-x}$, $f_1(x) = x\,e^{-x}$.

a. Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$.

b. Pour tout entier strictement positif *n*, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.

En utilisant la Partie I, montrer par récurrence que, pour tout *x* réel et tout entier $n \geq 1$: $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$.

2. Pour tout entier naturel *n*, on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x).dx$ (on ne cherchera pas à calculer I_n).

a. Montrer, pour tout entier naturel *n* et pour tout *x* élément de l'intervalle [0 ; 1], l'encadrement :

$0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$. En déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n).

b. Montrer, pour tout entier naturel *k* non nul, l'égalité : $I_k - I_{k-1} = -\frac{1}{k!}e^{-1}$.

c. Calculer I_0 et déduire de ce qui précède que : $I_n = 1 - \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{e^{-1}}{k!}$.

d. En déduire finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = e$.

BON TRAVAIL