

Grandes propriétés des fonctions continues

Dédou

Octobre 2009

Exemples d'images

- L'image de $[2, 3]$ par la fonction carré est $[4, 9]$
- L'image de $] - 2, 3[$ par la fonction carré est $[0, 9[$.

Exo 1

Quelle est l'image de $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$ par la fonction cosinus ?

Définition de l'image

Définition

Soit f une fonction et I une partie de DDf .

L'image de I par f , notée $f(I)$ est l'ensemble des nombres de la forme $f(x)$ avec $x \in I$:

$$f(I) := \{f(x) | x \in I\}.$$

Théorème

Soit f une fonction continue et I un intervalle contenu dans DDf .
Alors $f(I)$ est un intervalle.

Il y a environ sept sortes d'intervalles. Mais on peut donner une définition uniforme.

Les mathématiciens aiment bien ce genre de "factorisation".

Définition

Une partie I de \mathbb{R} est un intervalle ssi chaque fois qu'elle contient deux nombres, elle contient aussi tout l'intervalle entre ces deux nombres :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \in I \text{ et } z \in I \text{ et } x < y < z \Rightarrow y \in I.$$

Cas des fonctions croissantes

Proposition

Si f est continue croissante sur l'intervalle $[a, b]$ alors on a

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$$

Si de plus f est strictement croissante, on a aussi

$$f(]a, b[) =]f(a), f(b)[.$$

Exemple

L'image par la fonction partie entière E de l'intervalle $[0, 1]$ n'est pas l'intervalle $[0, 1]$.

Exo 2

Donnez l'énoncé analogue pour les fonctions décroissantes.

Cas des fonctions quelconques

Pour calculer l'image par des fonctions non monotones, on utilise la formule suivante pour l'image d'une réunion :

Proposition

L'image par une fonction quelconque f de la réunion $I \cup J$ de deux intervalles est la réunion $f(I) \cup f(J)$ des images des deux intervalles.

Exemple

Soit f la fonction carré. On a

$$f([-2, 3]) = f([-2, 0] \cup [0, 3]) = f([-2, 0]) \cup f([0, 3]) = [0, 4] \cup [0, 9].$$

Et donc $f([-2, 3]) = [0, 9]$.

Exo 3

Expliquez le calcul de $f([-4, 1])$.

Warning

Attention

L'image d'une intersection n'est en général pas l'intersection des images.

Exo 4

Calculez $\sin([0, 2\pi] \cap [\pi, 3\pi])$ et $\sin([0, 2\pi]) \cap \sin([\pi, 3\pi])$.

Théorème

L'image par une fonction continue d'un intervalle fermé borné est aussi un intervalle fermé borné.

Autrement dit, sur un intervalle $[a, b]$ de son domaine de définition, une fonction continue est bornée et atteint ses bornes.

Cet énoncé ne nous étonne pas du tout, avec nos potes, vu que pour les fonctions qu'on connaît, ça se voit gros comme une maison sur le tableau de variations.

Pourtant ce théorème n'est pas facile à prouver. Ceux que ça intéresse sont bienvenus à essayer de comprendre la preuve.