

Problème1 :**Partie A**

Soit la fonction u définie sur \mathbb{R} par $u(t) = e^t - t - 1$.

1. Etudier les variations de la fonction u .
2. En déduire le signe de u sur \mathbb{R} .

Partie B

Soit la fonction f définie par $f(t) = 1 + \frac{t+1}{e^t - t - 1}$. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité : 1 cm).

1. En utilisant le **A.**, vérifier que f est définie sur \mathbb{R}^* .
2. Calculer la limite de f en 0. Donner une interprétation graphique du résultat.
3. Montrer que $f(t) = \frac{e^t}{e^t - t - 1}$. Calculer alors la limite de f en $-\infty$ et en déduire l'existence d'une asymptote dont on précisera la position par rapport à C sur $] -\infty ; 0[$.
4. Montrer que $f(t) = \frac{1}{1 - \frac{t}{e^t} - \frac{1}{e^t}}$. Calculer alors la limite de f en $+\infty$ et en déduire l'existence d'une asymptote dont on précisera la position par rapport à C sur $] 0 ; \infty[$.
5. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
6. Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse -1 .
7. Tracer T , les asymptotes déterminées précédemment et la courbe C dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Problème2 :

Partie A :

On considère la fonction f , définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\text{Log}x - 2)$$

et on désigne par C sa courbe représentative relativement à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Soit u la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $u(x) = \text{Log} x + x - 3$.
 - a) Etudier les variations de u .
 - b) Montrer que l'équation $u(x)=0$ admet une solution unique α et que α appartient à l'intervalle $[2,3]$.
Montrer que $2,2 < \alpha < 2,3$.
 - c) Etudier le signe de $u(x)$ sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0 .
3. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
4. a) Etudier les variations de f .
b) Exprimer $\text{Log}\alpha$ en fonction de α . Prouver alors que

$$f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}.$$
5. a) Etudier le signe de $f(x)$.
b) Tracer C_f .

Partie B :

Soit F la primitive de f sur $]0, +\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$. On appelle Γ la courbe représentative de F relativement au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. a) Sans calculer $F(x)$, étudier le sens de variation de F sur $]0, +\infty[$.
b) Que peut-on dire des tangentes à Γ en ses points d'abscisses 1 et e^2 ?
2. Calcul de $F(x)$.
 - a) Vérifier que la fonction $V : x \mapsto x \text{Log}x - x$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $v : x \mapsto \text{Log}x$
 - b) Montrer que, pour tout x strictement positif :

$$f(x) = \text{Log}x - \frac{\text{Log}x}{x} + \frac{2}{x} - 2.$$
 - c) En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x .

Problème3 :

A]

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$f(x) = \frac{x \operatorname{Log} x}{x+1} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
- 2-a) Soit : $\varphi(x) = \operatorname{Log} x + x + 1$.
Etudier les variations de φ et prouver que $\varphi(x) = 0$ admet une solution et une seule β . Montrer que $\beta \in [0,27; 0,28]$.
- b) Pour $x > 0$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.
En déduire les variations de f .
- 3) Déterminer les limites de $f(x)$ et $f(x) - \operatorname{Log} x$ en $+\infty$
- 4) Construire les courbes (C) de f et Γ de la fonction $x \mapsto \operatorname{Log} x$. (unité 4cm)

B]

$$\text{Soit } g(x) = e^{\frac{1}{x}+1}, x > 0.$$

- 1) Montrer que $f(x) = 1$, admet une solution et une seule α et que $3,5 < \alpha < 3,7$. Placer le point C d'abscisse α .
- 2-a) Prouver que : $f(x) = 1 \Leftrightarrow g(x) = x$.
- b) Etudier les variations de g .
- c) Prouver que : $\forall x \in [3,5; 3,7]; g(x) \in [3,5; 3,7]$.
- d) Prouver que : $\forall x \in [3,5; 3,7]; |g'(x)| \leq |g'(3,5)| \leq \frac{1}{3}$
- 3) Soit U la suite définie par: $U_0 = 3,5$ et $U_{n+1} = g(U_n)$
- a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{5} \frac{1}{3^n}$. En déduire la limite de U .
- b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

C]

On se propose d'étudier l'équation $f(x) = n, n \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer que $f(x) = n$, admet une solution unique α_n
- 2) Etablir que $f(e^n) \leq n$. En déduire que $\alpha_n \geq e^n$.
- b) Prouver que la relation $f(\alpha^n) = n$ peut s'écrire :

$$\operatorname{Log}\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n}. \quad \underline{\mathbf{(1)}}$$

- c) En déduire à l'aide de a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{e^n}$.

3) On écrit α_n sous la forme :

$$\alpha_n = e^n(1 + \varepsilon_n), \text{ où } \varepsilon_n \geq 0. \quad \underline{\mathbf{(2)}}$$

a) A l'aide de (1), exprimer $(1+\varepsilon_n)\text{Log}(1+\varepsilon_n)$ en fonction de n .

b) Etablir que : $\forall t \geq 0 : 0 \leq (1+t)\text{Log}(1+t) - t \leq \frac{t^2}{2}$.

a) Dédurre de a) et b) que : $\forall n \geq 1 : \varepsilon_n \leq ne^{-n} \leq \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2}{2}$;

$$\text{puis que : } 0 \leq ne^{-n} - \varepsilon_n \leq \frac{n^2}{2} e^{-2n} \quad \underline{\text{(3)}}$$

d) A l'aide de (2) et (3), déterminer la limite de $e^n + n - \alpha_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème4 :

A) On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = x \text{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ f(x) = \text{Log}(e^x - x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1-a) Montrer que f est continue en 0.

b) f est-elle dérivable en 0 ?

c) Calculer la limite de $f(x)$ en $+\infty$ (On pourra poser : $t = \frac{2}{x}$).

2-a) Pour $x > 0$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f''(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}$.

b) Etudier les variations de f' , et trouver la limite de $f'(x)$ en $+\infty$.
En déduire le signe de $f'(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de f .

3- On appelle (C) la représentation graphique de f dans le plan (P) rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Tracer (C) en indiquant la tangente au point O et le point A d'abscisse 2.

4- Soit U la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $U(x) = \frac{2x}{x+2}$, et (H) sa

représentation graphique dans le plan (P) rapporté au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

a) Dresser le tableau de variation de U .

b) Vérifier que pour tout x appartenant à $]0, +\infty[$; on a :
 $f(x) - u(x) = xf'(x)$.

En déduire la position relative de (C) et (H).

Tracer (H) en indiquant le point B d'abscisse 2.

c) λ étant un réel strictement positif, montrer que la tangente à (C) au point d'abscisse λ

rencontre l'axe des ordonnées au point J d'ordonnée $U(\lambda)$.

En déduire à l'aide du tracer de (H) la détermination de la tangente à (C) au point d'abscisse λ

Tracer de cette façon la tangente à (C) en A.

B] On se propose de déterminer l'ensemble (E) des fonctions g définies et dérivables sur

$]0, +\infty[$; et possédant la propriété P suivante :

$$\forall x > 0, g(x) - xg'(x) = \frac{2x}{x+2}.$$

g étant une fonction définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, on pose pour

$$x \in]0, +\infty[, \quad G(x) = \frac{g(x)}{x}.$$

1) Montrer que g possède la propriété P si et seulement si, pour tout

$$x \in]0, +\infty[, \quad G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}.$$

2) En déduire l'ensemble (E).

C]

1) Résoudre l'équation $f(x) = x$ pour $x > 0$

2) Soit la suite u définie par
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < \frac{2}{e-1}$.

b- Montrer que (u_n) est croissante.

c- En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Problème5 :

A] On se propose d'étudier la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$: \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1-a) Calculer la dérivée f' de f sur $]0, +\infty[$.

b) Calculer la limite de $(1+u)e^{-u}$ lorsque u tend vers $+\infty$.

En déduire que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

c) Dresser le tableau de variation de f .

2) Soit φ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\varphi(u) = 1 - (1+u)e^{-u}$.

a) Calculer la dérivée de φ .

b) Prouver que , pour tout $u \geq 0$: $0 \leq \varphi'(u) \leq u$.

c) En déduire que , pour tout $u \geq 0$: $0 \leq \varphi(u) \leq \frac{u^2}{2}$ (1)

3-a) Etablir à l'aide de (1) que , pour tout $x > 0$: $0 \leq x - f(x) \leq \frac{1}{2x}$.

b) En déduire que (C) admet une asymptote Δ au voisinage de $+\infty$; préciser la position de (C) par rapport à Δ .

4) Soit x_0 un élément de $]0, +\infty[$ et T_{x_0} la tangente à (C) au point d'abscisse x_0 .

a) Déterminer une équation de T_{x_0} .

b) Montrer que T_{x_0} coupe l'axe $(O; \vec{i})$ au point d'abscisse $\frac{x_0}{1 + x_0 + x_0^2}$.

5) Construire (C) et Δ . On précisera les tangentes à (C) au points d'abscisses 1 et 0 .

B] Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{x}{1 + x + x^2}$. On se

propose d'étudier la suite U définie par : $u_{n+1} = g(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1-a) Etablir que , pour tout $x \geq 0$, $g(x) \leq x$.

Résoudre l'équation : $g(x) = x$.

b) Montrer que la suite U est décroissante.

c) Montrer que U est convergente et donner sa limite.

2-a) Montrer que , pour tout entier $n \geq 1$, $g\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$.

b) Etudier les variations de g sur $[0, 1]$.

c) En déduire que , pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n-1} \leq \frac{1}{n}$.

d) Pour tout entier $p \geq 0$, exprimer $\frac{1}{u_{p+1}} - \frac{1}{u_p}$ en fonction de u_p .

Etablir que : $1 \leq \frac{1}{u_{p+1}} - \frac{1}{u_p} \leq 1 + \frac{1}{p+1}$.

En déduire que , pour tout $n \geq 1$:

$$n \leq \frac{1}{u_n} - 1 \leq n + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} .$$

e) Pour tout $x \geq 2$, comparer les réels : $\frac{1}{x}$ et $\text{Log}x - \text{Log}(x - 1)$.

En déduire que , pour tout $n \geq 2$: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \leq \text{Log}n$.

f) Déterminer la limite de $n.u_n$ lorsque n tend vers $+\infty$

