I - QUEL INTERET POUR CE SUJET ?

Etude de proprietes geometriques à l'aide des nombres complexes.

II - DEVELOPPEMENT

1-

On a $Z_A = 1$ et $Z_M = Z = 1 + e^{2i\theta}$

$Z - Z_A = e^{2i\theta}$

$|Z - Z_A| = 1$

Donc quelque soit $\theta \in \left]0\,;\pi\right[$, AM = 1.

Donc M est sur le cercle de centre A et de rayon 1.

2-

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}) = \text{Arg}\,\dfrac{Z - Z_A}{Z_B - Z_A} = \text{Arg}\, e^{2i\theta} = 2\theta$

$\theta \in \left]0, \pi\right[$

Quand θ decrit $\left]0,\pi\right[$, 2θ décrit $\left]0,2\pi\right[$

Donc l'ensemble E des points M quand θ decrit l'intervalle $\left]0,\pi\right[$ est le cercle de centre A et de rayon 1 prive du point B.

3-

On a :

$Z' = e^{-2i\theta} Z$

d'où

$Z' = e^{-2i\theta}\left(1 + e^{2i\theta}\right)$

$= 1 + e^{-2i\theta}$

$= 1 + \cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta)$

$= 1 + \cos(2\theta) - i\sin(2\theta)$

$= \bar{Z}$

De plus $Z' - Z_A = e^{-2i\theta}$

donc $|Z' - Z_A| = 1$

donc M' appartient au cercle C.

4-

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{-2\pi}{3}$

$A' = r(A)$

a)

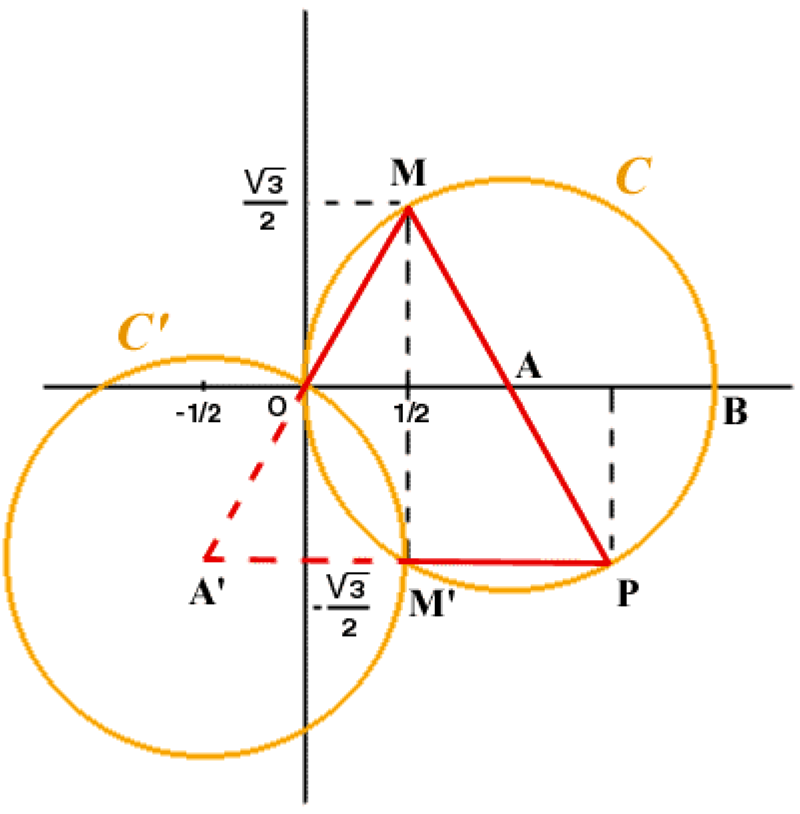
Dans une rotation, l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

$Z_{A'} = e^{-2i\frac{\pi}{3}} Z_A$

d'où $Z_{A'} = e^{-2i\frac{\pi}{3}} = \cos\dfrac{-2\pi}{3} + i\sin\dfrac{-2\pi}{3}$

$= -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

C' est le cercle de centre A' de coordonnees $\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et de rayon 1.



b)

On a $|Z_A| = 1$ donc $OA = 1$

et AM = 1 (M est sur le cercle C)

De plus, $|Z| = \left|1 + \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right|$

$= \left|\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$

donc OM= 1

OA = AM = OM

Donc , le triangle AOM est equilateral.

c)

$OA' = |Z_{A'}| = 1$

Donc O est sur C'

$Z_{M'} = \bar{Z}$

M est sur le cercle C donc M' est sur C.

(OB est un diamètre du cercle)

Donc, C et C' se coupent en O et en M'.

d)

M a pour coordonnees $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

P est le symetrique de M par rapport à A donc P a pour coordonnees $\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(En effet, A est le milieu de $[MP]$).

$A'\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$P\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Donc le milieu de $[A'P]$ a pour coordonnees $\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ soit M'.

III - COMMENTAIRE MATHEMATIQUE

Il fallait savoir allier judicieusement calculs dans l'espace complexe C et interpretations geometriques pour reussir cet exercice.