CORRECTION EXERCICES

CH : Identité de Bézout

QCM :

1) 5
2) P
3) (1 + 5k , 2 + 11k)
4) (17k , 13k)

VRAI-FAUX :

1) Vrai

Si $n \equiv 0\ (143) \Rightarrow n = 143k$

$\Rightarrow n = 11 \times 13\ k$

$\Rightarrow\ n \equiv 0\ (13)$ et $n \equiv 0\ (11)$

Si $n \equiv 0\ (13)$ et $n \equiv 0\ (11) \Rightarrow\ n \equiv 0\ (11 \times 13)$ car $11 \wedge 13 = 1$ (Th du cours).

2) a) Vrai car les 3a et -3a ont même diviseurs.
   b) Faux a = 1 et b = -1
3) Faux car $25 \wedge 80 = 5$ et 5 ne divise pas 3.
4) Faux 2 n'admet pas d'inverse.
5) Vrai car $(n-1) \equiv -1\ (n) \Rightarrow$ $(n-1)^2 \equiv 1\ (n)$

EXERCICE 1 :

1) $558 \wedge (-1235) = 1$
2) $924 \wedge 990 = 66$
3) $-999 \wedge 888 = 111$
4) $1890 \wedge (-5250) = 210$

EXERCICE 2 :

1) $558 \vee (-1235) = 1235$
2) $51 \wedge (-255) = 51$ et $51 \vee (-255) = 255$
3) $(2n+1) \wedge n = 1$ et $(2n+1) \vee n = n(2n+1)$

EXERCICE 3 :

$a \in \{-325, -144, -108, -72, -36, 36, 72, 108, 144, 325\}$

EXERCICE 4 :

$$(a,b) \in \left\{ \begin{matrix} (-19,-114);(-38,-57);(-57,-38);(-114,-19) \\ (19,114);(38,57);(57,38);(114,19) \end{matrix} \right\}$$

EXERCICE 5 :

On a 19^2 divise $a^2 - b^2$ or 19^2 ne divise pas 490.

EXERCICE 6 :

1) $2^5 = 32$
2) $2^5 \equiv -1\ (11) \Rightarrow (2^5)^{68} \equiv 1\ (11) \Rightarrow 2^{340} \equiv 1\ (11)$

   $2^5 \equiv 1\ (31) \Rightarrow (2^5)^{68} \equiv 1\ (31) \Rightarrow 2^{340} \equiv 1\ (31)$
3) $2^{340} - 1 \equiv 0\ (11)$, $2^{340} - 1 \equiv 0\ (31)$ et $11 \wedge 31 = 1$

   $\Rightarrow 2^{340} - 1 \equiv 0\ (31 \times 11) \Rightarrow 2^{340} - 1 \equiv 0\ (341)$

EXERCICE 7 :

1) $a \wedge 3 = a \wedge 11 = a \wedge 17 = 1$ sinon a et 561 ne sont pas premiers entre eux.
2) Fermat
3) $a^2 \equiv 1\ (3) \Rightarrow (a^2)^{280} \equiv 1\ (3) \Rightarrow\ a^{560} \equiv 1\ (3)$

   $a^{10} \equiv 1\ (11) \Rightarrow (a^{10})^{56} \equiv 1\ (11) \Rightarrow\ a^{560} \equiv 1\ (11)$

   $a^{16} \equiv 1\ (17) \Rightarrow (a^{16})^{35} \equiv 1\ (17) \Rightarrow\ a^{560} \equiv 1\ (17)$
4) $a^{560} - 1 \equiv 0\ (3)$, $a^{560} - 1 \equiv 0\ (11)$ et $3 \wedge 11 = 1$

   $\Rightarrow\ a^{560} - 1 \equiv 0\ (33)$

   $a^{560} - 1 \equiv 0\ (33)$, $a^{560} - 1 \equiv 0\ (17)$ et $33 \wedge 17 = 1$

   $\Rightarrow\ a^{560} - 1 \equiv 0\ (256)$

EXERCICE 8 :

1) Si n divise(4a+5b) et n divise (5a+2b)

$\Rightarrow$ n divise 5(4a+5b) - 4(5a+2b) et n divise 5(5a+2b)-2(4a+5b)

$\Rightarrow$ n divise 17b et n divise 17a

2) Soit d' = (4a+5b) $\wedge$ (5a+2b)
   - ✓ d divise (4a+5b) et d divise (5a+2b) donc d divise d'
   - ✓ d' divise 17a et d' divise 17b donc d' divise 17d

     si d' divise 17 $\Rightarrow$ d' = 1 ou d' = 17

     sinon d' divise d donc d' = d.

EXERCICE 9 :

1) si d divise a et d divise b alors d divise tout combinaisons linéaires de a et b donc d divise (a+bn) et d divise (a + b(n-1)).
2) si d divise (a+bn) et d divise (a + b(n-1)) donc d divise (a+bn) - (a + b(n-1)) donc d divise b.

   d divise b et d divise (a+bn) donc d divise a.
3) d divise a et d divise b

   $\Leftrightarrow$

   d divise (a+bn) et d divise (a + b(n-1)).

   Donc $a \wedge b = (a+bn) \wedge (a + b(n-1))$

CORRECTION EXERCICES

CH : Identité de Bézout

EXERCICE 10 :

2015 = 1*2007+8, 8 = 1*2015 - 1*2007

2007 = 250*8+7, 7 = -250*2015 + 251*2007

8 = 1*7+1, 1 = 251*2015 - 252*2007

a = 251 et b = (-252)

EXERCICE 11 :

1) $391 \wedge 323 = 17$?
2) Pas des solutions.
3) Pas des solutions.

EXERCICE 12 :

1) Solution particulière (5,-44).
2) a) 97 = 1*77+20, 20 = 1*97 - 1*77

   77 = 3*20+17, 17 = -3*97 + 4*77

   20 = 1*17+3, 3 = 4*97 - 5*77

   17 = 5*3+2, 2 = -23*97 + 29*77

   3 = 1*2+1, 1 = 27*97 - 34*77

   Solution particulière de (E) : (189,-238).

   b) $\{\,(77k+189\ ;\ 97k-238)\ k \in Z\,\}$

EXERCICE 13 :

1) $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n$

2) a) par récurrence

   b) $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = 1$ Bezout :

   $a_n \wedge b_n = a_{n+1} \wedge a_n = b_{n+1} \wedge b_n = b_{n+1} \wedge b_n = 1$.

EXERCICE 14 :

a) Pas des solutions.

b) $\{\,(10k+2\ ;\ 5k\,)\ k \in Z\,\}$

c) Pas des solutions.

EXERCICE 15 :

a) 4x-3y=5 ou 4x+3y = 1

$\{\,(3k+5\ ,\ 4k+5\,)\,;(-3k+1, 4k-1)\ ;k \in Z\,\}$

b) $x^2 - 9y^2 = 2 \Leftrightarrow (x-3y)(x+3y) = 2 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x-3y=1 \\ x+3y=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-3y=-1 \\ x+3y=-2 \end{cases}$ ou

$\begin{cases} x-3y=2 \\ x+3y=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-3y=-2 \\ x+3y=-1 \end{cases}$

EXERCICE 16 :

1) $\{\,(8k-3\ ;\ 13k-5)\ k \in Z\,\}$

2) si (x, y, z) solution de S $\Rightarrow$ (x, y) solution de E (la somme)

   et $2z = 5x + y - 1 \Rightarrow 2z = 43k - 21$ Donc les solutions sont :

   $\{\,(8k-3\ ,\ 13k-5\ ,(53k-21)/2)\ ;k \in Z$ et k impair$\,\}$

EXERCICE 17 :

1) u = 5 et v = 1

2) x = 9k+ a et x = 11k'+ b $\Rightarrow$

   (1) 44x = 396k + 44a et (2) 45x = 495k' + 45b

   (2) – (1) $\Rightarrow$ x = (95k' – 396k) + (45b – 44a)

   $\Rightarrow$ x = 99(5k' - 4k) + (45b – 44a) $\Rightarrow x \equiv (45b-44a)\ (99)$

3) $x \equiv 6(9)$ et $\equiv 8\ (11) \Rightarrow\ x \equiv 96\ (99)$

   Si $x \equiv 96\ (99) \Rightarrow\ x \equiv 6(9)$ et $\equiv 8\ (11)$

EXERCICE 18 :

1) a) x = 7

   b) $5x \equiv 1\ (17) \Rightarrow\ x \equiv 7\ (17)$

   c) $345x \equiv 1\ (17) \Rightarrow 5x \equiv 1\ (17) \Rightarrow\ x \equiv 7\ (17)$

2) a) $5x \equiv 2\ (17) \Rightarrow\ x \equiv 14\ (17)$

   b) $430x \equiv 2\ (17) \Rightarrow\ 5x \equiv 2\ (17) \Rightarrow\ x \equiv 14\ (17)$

EXERCICE 19 :

a) $17x \equiv 1\ (33) \Rightarrow\ x \equiv 2(33)$

b) $17x \equiv -9\ (33) \Rightarrow\ x \equiv -18\ (33) \Rightarrow\ x \equiv 15\ (33)$

EXERCICE 20 :

$12x \equiv 30y(15) \Rightarrow 12x \equiv 2y(15) \Rightarrow y \equiv 96x(15) \Rightarrow\ y \equiv 6x(15)$

$\{\,x, 15k+6x; x \in Z$ et $k \in Z\,\}$

EXERCICE 21 :

$11x \equiv 99y(77) \Rightarrow 11x \equiv 22y(77) \Rightarrow 11(2y-x) \equiv 0(77)$

$\Rightarrow x \equiv 2y(77)$

EXERCICE 22 :

1) 2b - 3a = 7 $\Rightarrow a \wedge b=1$ ou $a \wedge b=7$

2) a) 3a – 2b = -7

   b) $\{\,(2k-3\ ;\ 3k-1\,)\ k \in Z\,\}$

CORRECTION EXERCICES

CH : Identité de Bézout

3) $a \wedge b=7 \Leftrightarrow a \equiv 0(7)$ et $b \equiv 0(7)$

$\Leftrightarrow 2n-3 \equiv 0(7)$ et $3n-1 \equiv 0(7) \Leftrightarrow n \equiv 5(7)$

EXERCICE 23 :

1) $a \wedge n=1 \Rightarrow a \wedge p=1$ et $a \wedge q=1$ et $a \wedge u=1$

Fermat $\Rightarrow a^{p-1} \equiv 1(p)$, $a^{q-1} \equiv 1(q)$ et $a^{u-1} \equiv 1(u)$

On a $(n-1) = k(p-1)$, $a^{p-1} \equiv 1(p) \Rightarrow a^{(p-1)k} \equiv 1^k (p)$

$\Rightarrow a^n \equiv 1(p)$ de même pour les autres.

2) $a^n -1 \equiv 0(p)$, $a^n -1 \equiv 0(q)$ et $p \wedge q=1 \Rightarrow a^n -1 \equiv 0(pq)$

$a^n -1 \equiv 0(pq)$, $a^n -1 \equiv 0(u)$ et $pq \wedge u=1 \Rightarrow a^n -1 \equiv 0(pqu)$

3) 561 = 3x11x17; n= 561 , p = 3 , q = 11 et u =17

4) n =1729 , p = 7 , q = 11 et u = 19

EXERCICE 24 :

1) a) Supposons que p ne divise pas a

On a p divise ab $\Rightarrow$ p divise b(Gauss)

P divise b et p divise a+b $\Rightarrow$ p divise a absurde

Donc p divise a et par suite p divise b

b) soit $a \wedge b=d$.

- ✓ p divise a et p divise b $\Rightarrow$ p divise d
- ✓ D divise a et d divise b $\Rightarrow$ d divise a+b et d divise ab $\Rightarrow$ d divise $(a+b) \wedge ab \Rightarrow$ d divise p

2) a) (10,85) et (5,170)

b) $(a+b) \wedge ab=5$ et $a \vee b=170 \Rightarrow a \wedge b=5$ et $a \vee b=170$

$\Rightarrow$ a= 10 et b = 85 ou a = 5 et b = 170

EXERCICE 25 :

1) $361 \wedge 484 = 121$

2) $(n , n+1) \in S$ car $n \wedge (n+1)=1$ et $(n+1)-n=1$

3) a) Si x = k(y-x) et y (k+1)(y-x) $\Rightarrow$ (k+1)y –kx = y-x

$\Rightarrow x \wedge y = (y-x)$

Si $(x, y) \in S \Rightarrow (y-x) = x \wedge y \Rightarrow$ (y-x) divise x

$\Rightarrow$ <u>x = k(y-x)</u> $\Rightarrow$ x = ky - kx $\Rightarrow$ -ky = (k+1)(-x)

$\Rightarrow$ <u>y = (k+1)(y-x)</u>

b) $(x \wedge y)(x \vee y) = xy \Rightarrow (y-x) (x \vee y) = k(k+1)(y-x)(y-x)$

$\Rightarrow (x \vee y) = k(k+1)(y-x)$.

3) a) $228 = 2^2 x3x19$.

$D_{228} = \{1,2,3,4,9,12,19,38,57,76,114,228\}$

b) $(x \vee y)$= 2x3x38 $\Rightarrow$ x = 2x38 et y = 3x 38.

$(x \vee y)$= 3x4x19 $\Rightarrow$ x = 3x19 et y = 4x 19.

EXERCICE 26 :

1) Le point $(\frac{17}{10}, \frac{1}{10})$.

2) f est une similitude indirect.

3) a) La droite d'équation 4x-3y=2.

b) $\{ (3k+2 \ ; \ 4k+2) \ k \in Z \}$

4) Re(z') = $\frac{4y+4}{5}$ et Im(z') = $\frac{2-3y}{5}$

Re(z') est un entier si $4(y+1) \equiv 0(5) \Rightarrow y+1 \equiv 0(5)$

Im(z') est un entier si $2-3y \equiv 0(5) \Rightarrow -3y \equiv -2(5)$

$\Rightarrow y \equiv -6(5) \Rightarrow y \equiv -1(5)$

EXERCICE 27 :

1) $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1 \Rightarrow a^2 + ab - b^2 = 1$ ou $a^2 + ab - b^2 = -1$

$\Rightarrow$ a(a+b) – bb = 1 ou a(a+b) – bb = -1

2) si x = y $\Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow$ x = 1 ou x = -1

les solutions sont (1,1) et (-1,-1).

4) a) $(q^2 +q(p+q)-(p+q)^2)^2 = (p^2+ pq - q^2)^2 =1$

b) (q, p+q) solution $\Rightarrow$ (p+q, p+q+q) solution

$\Rightarrow$ (p+q,p+eq) solution.

c) (1,1) ;(1,2) ;(2,3) ;(3,5) ;(5,8) et(8,13).

EXERCICE 28 :

1) on a $(a^2-b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2+b^2)^2$

2) a) si $x \wedge y = 1 \Rightarrow x^2 \wedge y^2 = 1 \Rightarrow z^2 \wedge y^2 = 1$ et $z^2 \wedge x^2 = 1$

$\Rightarrow z \wedge y = 1$ et $z \wedge x = 1$.

b) x et y ne sont pas les deux pairs car $x \wedge y = 1$.

c) $a^2 \equiv 2(4)$ n'admet pas des solutions. Si x et y les deux impairs alors x = 2k+1 et y = 2k' +1

$\Rightarrow z^2 = 4k'' +2$ .Absurde donc x et y ne sont pas impairs

d) z+x=2p et z-x = 2q $\Rightarrow$ x = p-q; z p+q et $y^2 = 4pq$.

3) $\{ (p-q, 4pq, p+q) \ p \text{ et } q \text{ deux carrés parfaits et } p \wedge q=1 \}$

EXERCICE 29 :

1) a) bac a CED

b) FADE a EEIA

2) A a B, B a D, C a H, D a E, E a D, F a H, G a E, H a D, I a H et K a E non (non injective)

3) a) $a^i \equiv a^{i'}(11) \Leftrightarrow a^{i'} = 11 a^i \Leftrightarrow a^{i'-i} = 11 \Leftrightarrow a^{i'-i} \equiv 1(11)$

b) si a^i n'est pas congru a 1 modulo 11 pour i inferieur

CORRECTION EXERCICES

CH : Identité de Bézout

a 9 alors les 10 codes de 10 caractères sont différents

c) on a : $a^{10} \equiv 1(11)$ donc si $a^k \equiv 1(11)$ alors k divise 10(absurde)

d) Pour bien choisir le réel a il faut que a^2 et a^5 ne congru pas à 1 modulo 11.

EXERCICE 30 :

1) $F_3 = 1, F_4 = 2, F_5=3, F_6=5, F_7=8, F_8=13, F_9=21$ et $F_{10}=43$

2) par récurrence.

3) Bézout.

4) par récurrence.

5) $F_{m+n} \wedge F_m = F_m \wedge (F_n F_{m+1}) = F_m \wedge F_n$ car $F_m \wedge F_{m+1}=1$

EXERCICE 31 :

1) $\varphi(7) = 1$ car tout les entiers non nul inferieurs à 7 sont premiers avec 7.

$\varphi(8) = 4$ car les premiers avec 8 sont 1,3,5 et 7.

2) on a exactement n entiers inferieurs à n, comme 0 n'est pas premier avec n alors $\varphi(n) \leq n-1$ .On peut ajouté que $\varphi(n) \geq 1$ car n et n-1 premiers entre eux.

3) a) évidant.

b) Fermat.

4) a)on a $\varphi(p)\varphi(q)= (p-1)(q-1)$.

x premier avec(pq) $\Leftrightarrow x \wedge p=1$ et $x \wedge q =1$

on a (p-1) non premier avec p et (q-1) non premier avec q donc $\varphi(pq) = (pq-1) - (p-1)-(q-1)$

$= (p-1)(q-1)$.

b) $a^{\varphi(p)} \equiv 1(p)$ et $a^{\varphi(q)} \equiv 1(q)$

$\Rightarrow a^{\varphi(p)\varphi(q)} \equiv 1(p)$ et $a^{\varphi(q)\varphi(p)} \equiv 1(q)$

$\Rightarrow a^{\varphi(p)\varphi(q)} \equiv 1(pq)$ car $p \wedge q = 1$.

c) 1649 = 97x17 et 10403=101x103.

5) a) Seul les multiple de p ne sont pas premiers avec p^k qui sont p, 2p, 3p…………$p^{k-1} p^k$ donc p^{k-1} entiers donc $\varphi(p^k)= p^k - p^{k-1}$.

b) $125 = 5^3$, $256 = 2^8$ et $1331 = 11^3$.

6) a) $(1+up)^{p^{(k-1)}} = \sum_{j=0}^{p^{(k-1)}} C_{p^{k-1}}^{j}(up)^j = 1+ \sum_{j=1}^{p^{(k-1)}} C_{p^{k-1}}^{j}(up)^j$

Comme p^{k-1} divise C_{pk-1}^{j} donc p^k divise $C_{pk-1}^{j}(up)^j$

b) pour k = 1 on a : p^{k-1} divise $a^{\varphi(p)} = a^{p-1} \equiv 1(p)$.

on a : $\varphi(p^{k+1}) = p\ \varphi(p^k)$

$\Rightarrow (a^{\varphi(p^{k+1})}) = (a^{\varphi(p^k)})^p =(1+u\ p^k)^p \equiv 1(p^{k+1})$

c) $125 = 5^3$ et $256 = 2^8$.

CORRECTION EXERCICES

CH : Identité de Bézout

CORRECTION EXERCICES

CH : Identité de Bézout

CORRECTION EXERCICES

CH : Identité de Bézout