Dérivation et fonction tangente

Exercice 1

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0, \pi^2]$ par

$$f(x) = \cos \sqrt{x}$$

1. (a) Vérifier que pour tout réel $x \in [0, \pi^2]$,

$$f(x) - 1 = -2 \sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$$

   (b) Démontrer que f est dérivable en zéro et donner $f'(0)$.

2. (a) Justifier que f est dérivable sur $[0, \pi^2]$ et calculer $f'(x)$.

   (b) Étudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.

3. (a) Résoudre dans $[0, \pi^2]$ l'équation : $f(x) = 0$.

   (b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse $\dfrac{\pi^2}{4}$

Exercice 2

Pour tout entier n strictement positif, on définit la fonction f_n sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n \sqrt{1-x}$$

1. Calculer $f_n(0)$ et $f_n(1)$.

2. (a) Justifier que f_n est dérivable sur $[0, 1[$ et montrer que

$$f_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{2\sqrt{1-x}} \left[2n - (2n+1)x\right]$$

   (b) Étudier la dérivabilité de f_n en 1.

   (c) Dresser le tableau de variations de f_n.

3. (a) Montrer que f_n admet un maximum a_n que l'on exprimera en fonction de n.

   (b) Prouver que $a_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$

   (c) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

Exercice 3

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n sur $[-\pi\,,\,\pi]$ par :

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + \sin^2(x)}$$

1. Calculer $f_n(0)$ et $f_n(\pi)$.
2. Montrer que f_n est une fonction paire.
3. (a) Justifier que f_n est dérivable sur $[-\pi\,,\,\pi]$ et vérifier que $\quad f_n'(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2\,f_n(x)}$
   (b) Étudier les variations de la fonction f_n sur $[0\,,\,\pi]$.
   (c) Dresser le tableau de variations de f_n sur $[-\pi\,,\,\pi]$.
4. (a) Soit x un réel fixé de l'intervalle $[-\pi\,,\,\pi]$.
   Déterminer la limite de $f_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) On pose pour tout réel x de $[-\pi\,,\,\pi]$, $\quad \varphi(x) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x)$
   La fonction φ est-elle continue en zéro ? Est-elle dérivable en zéro ?

Exercice 4

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f_n(x) = \tan(x) - x - n$$

1. Soit n un entier naturel fixé.
   (a) Déterminer
   $$\lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{2}} f_n(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow -\frac{\pi}{2}} f_n(x)$$
   (b) Étudier le sens de variation de la fonction f_n
   (c) Démontrer que l'équation d'inconnue x, $f_n(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$
   On note α_n cette solution. À l'aide de la calculatrice, proposer une valeur décimale approchée de α_{10} à 10^{-3} près.
   (d) Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $f_n(x)$.
2. La question 1.(c) permet de définir la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   (a) Justifier que cette suite est bornée.
   (b) Calculer $f_n(\alpha_{n+1})$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (c) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
   (d) Déterminer la limite de $\tan(\alpha_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (e) Prouver que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Quelle est sa limite ?