

Soit la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg}(x)}$.

1) a) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Tracer la courbe (C) de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} .

b) Déterminer $f^{-1}(1)$.

c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) - \frac{\pi}{4}}{x - 1}$.

d) Tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

3) a) Étudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en 0.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0, +\infty[$.

c) Calculer $(f^{-1})'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

4) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$: $f^{-1}(x) + f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

5) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$:

$$(f^{-1})(n) \leq (f^{-1})(n+k) \leq (f^{-1})(2n).$$

b) Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $u_n = \frac{1}{n+k} \sum_{k=0}^{k=n} f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right)$.

Montrer que : $(f^{-1})\left(\frac{1}{2n}\right) \leq u_n \leq (f^{-1})\left(\frac{1}{n}\right)$.

c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.