

Exercices : Géométrie de l'espace

Exercice N°1 :

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé direct de l'espace, on donne le plan $P : 3x - 2y + z - 2 = 0$, $A(1, 0, 2)$.

- 1) a) Vérifier que $A \notin P$.
b) Déterminer les coordonnées du point H le projeté orthogonal de A sur P.
c) Calculer $d(A, P)$.
- 2) Soit B (0, 1, 2) et C (1, -2, 0).
a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
b) Soit E (1, 1, -1), montrer que $(OE) \perp (ABC)$.
c) Prouver que $x + y - z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).
- 3) a) Montrer que $P \perp (ABC)$.
b) Soit $\Delta = P \cap (ABC)$. Donner une représentation paramétrique de Δ .
c) Soit F le projeté orthogonal de E sur Δ . Déterminer les coordonnées de F.
d) Calculer $d(E, \Delta)$.

Exercice N°2 :

L'espace ξ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère l'ensemble (S) dont une équation cartésienne est :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$. P est le plan passant par le point A (-1, 0, 2) et dont un vecteur normal est $\vec{N} = \vec{i} + \vec{k}$.

- 1) Montrer que : $x + z - 1 = 0$ est une équation cartésienne de P.
- 2) Calculer les coordonnées du point H la projection orthogonale de I (1, 0, -1) sur le plan P.
- 3) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.
- 4) Démontrer que le plan P et la sphère (S) sont sécants suivant un cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice N°3 :

Soient A et B deux points distincts de l'espace ξ , à tout réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on associe

l'ensemble : $S_t = \{M \in \xi / (4\cos^2 t)MA^2 - 3MB^2 = 4\cos^2 2t\}$.

- 1) On note G_t le barycentre des points pondérés $(A, 2\cos t)$ et $(B, \sqrt{3})$ et G'_t le barycentre des points pondérés $(A, 2\cos t)$ et $(B, -\sqrt{3})$.

a) Justifier l'existence de G_t et G'_t .

b) Montrer que : $\forall M \in \xi$ on a : $\vec{M} \in S_t \Leftrightarrow MG \cdot MG' = f(t)$

$$f(x) = \frac{4\cos^2 2x}{2\cos 2x - 1}$$

c) En déduire la nature de $S \frac{\pi}{4}$.

2- l'espace ξ étant rapporté au repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne :

A (3,0,0) et B (2,0,0) .

a- Montrer que $S \frac{\pi}{4}$ est une sphère de centre O, de rayon $R = \sqrt{6}$.

b- Soit (S') : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6y + 33/2 = 0$.monter que S' est une sphère. Préciser son centre et son rayon.

c- Déterminer le rapport négatif de l'homothétie h qui transforme $S \frac{\pi}{4}$ en (S'). préciser le centre J de h.

d- Soit le plan P : $2x - y + z - 6 = 0$.

Montrer que P est tangent à $S \frac{\pi}{4}$ et en déduire qu'il est aussi tangent à S'.

Exercice 4 :

L'espace ξ étant muni du repère orthonormé $(O , \vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$. S_m l'ensemble des points M(x, y,z) de ξ tel que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2 (m+1)x - 4 my + 2 (m-2)z + 5m^2 + 5 m - 1 = 0$$

1- a- déterminer les valeurs de m pour les quelles S_m est une sphère , on précisera dans ce cas son centre I_m et son rayon R_m .

a- Déterminer l'ensemble (Γ) des points I_m lorsque m varie

2- Soit le plan P : $2x - 2y + z + 2 = 0$

a- Déterminer les valeurs de m pour les quelles $S_m \cap P$ est un cercle

b- Déterminer le centre et le rayon du cercle C intersection de P et S_0 .

c- Soit D la droite passant par A (0,1,0) et de vecteur directeur $U = \vec{i} - 2 \vec{k}$.
 $\vec{} \quad \vec{} \quad \vec{}$

Montrer que $D \subset P$ et déterminer $D \cap C$ (avec $C = P \cap S_0$)

3- Montrer que $S_0 \cap S_1$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 5 :

Dans l'espace ξ muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les plans :

$$P : x - 2y + 3z - 2 = 0 \text{ et } Q : 2x + y - z + 5 = 0$$

- 1- a- Montrer que P et Q sont sécants et vérifier qu'ils ne sont pas perpendiculaires
- a- Donner une représentation paramétrique de la droite $D : P \cap Q$
- 2- Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -1 - \alpha \\ y = \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- a- Montrer que Δ est incluse dans P.
- b- Etudier la position de $\text{Det } \Delta$.
- 3- déterminer une équation cartésienne du plan H perpendiculaire à P et contenant Δ .
- 4- calculer la distance du point A (1,2,3) à la droite Δ .

Exercice 6 :

Dans l'espace ξ muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne les points A (0,-2,3) et I (1, 0,2)

- 1- déterminer une représentation paramétrique de la droite (IA).
- 2- a- Déterminer l'équation cartésienne du plan P par A et perpendiculaire à (IA)
- b- déterminer par leur équation toutes les plans parallèles à P.
- 3- Soit $S = \{M(x,y,z) \in \xi \text{ tel que } x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 1 = 0 \}$
- a- montrer que S est une sphère que l'on caractérisera.
- b- Vérifier que le point A est à l'extérieur de la sphère S.
- 4-déterminer les plans Q parallèle à P et tangents à S.
- 5- a- déterminer le plan Q parallèle à P et passant par I .
- b- caractériser alors $S \cap Q$

Exercice 7 :

L'espace ξ est rapporté d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

- 1- Soit la droite $\Delta : \begin{cases} x+y = 0 \\ y-3z+14 = 0 \end{cases}$

Déterminer un vecteur directeur \vec{U} de Δ et un point $A \in \Delta$.

2- Soit $m \in \mathbb{R}$ et

$$P = \{M(x, y, z) \in \xi \text{ tel que } (2-m)x + (1+m)y + (2m-1)z + 2 + m = 0\}$$

a- montrer que pour tout réel m , P_m est un plan

b- Etudier la position relative de Δ et P_0

3- a- démontrer que tous les plans P_m contiennent une droite fixe D dont le système d'équations cartésiennes est :

$$\begin{cases} -x + y + 2z + 1 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Exercice 8 :

Soit $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace ξ . On donne les points $A(1, -2, 3)$, $B(2, 3, 5)$ et $C(1, 0, 1)$

1- Montrer que A, B, C ne sont pas alignés.

2- Soit

$$D : \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = -1 + \alpha \\ z = 2 + 3\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \Delta : \begin{cases} x = \beta \\ y = -4\beta \\ z = 2\beta \end{cases} \quad \beta \in \mathbb{R}$$

a- le point C appartient-il à D ?

b- Etudier la position de D et Δ

c- Déterminer un système d'équation cartésienne de la droite Δ' parallèle à D et passant par C .

3- Δ et Δ' sont-elles coplanaires ?

Exercice 9 :

On considère la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z + 12 = 0$

1°) Vérifier que $A(1, 2, 3)$ est sur la sphère puis déterminer le centre Ω et le rayon de la sphère.

2°) Déterminer l'équation du plan tangent à la sphère passant par A .

3°) On considère B le point de coordonnées $B(5, 6, 2)$ ce point est-il sur la sphère, sur le plan ?

4°) Déterminer le volume du cône issu de B tangent à la sphère.

Exercice 10 :

Le triangle ABC est isocèle de sommet A et G est le centre de gravité du triangle. G' est le symétrique de G par rapport à la droite (BC).

Démontrer que G' est le barycentre de (A,1) (B, -2) et (C, -2).

Déterminer l'ensemble des points du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$

Exercice 11 :

On considère la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z + 12 = 0$

1°) Vérifier que A (1, 2, 3) est sur la sphère puis déterminer le centre Ω et le rayon de la sphère.

2°) Déterminer l'équation du plan tangent à la sphère passant par A.

3°) On considère B le point de coordonnées B (5, 6, 2) ce point est-il sur la sphère, sur le plan ?

4°) Déterminer le volume du cône issu de B tangent à la sphère.

Exercice 12

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace, on donne les points

A (1, -2, 3), B (1, 0, 2) et C $(3, -\frac{5}{2}, 2)$.

4) Montrer que les points O, A et B ne sont pas alignés.

5) Montrer que $(AC) \perp (OAB)$.

d) Soit H le projeté orthogonal de A sur (OB).

e) Montrer que $(OB) \perp (AHC)$.

f) Donner une équation cartésienne du plan (AHC).

6) Soit $(P) = \{M(x, y, z) : MA^2 - MB^2 = 3\}$.

a) Montrer que P est un plan perpendiculaire à (AB).

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de P et (AB).

Exercice 13

L'espace ξ étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

On donne les points A (1, 4, -2) et B (5, 1, -1)

1) Ecrire une équation du plan médiateur de [AB].

2) Soit S_m l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y + mz = 0.$$

Montrer que pour tout m de \mathbb{R} S_m est une sphère.

3) Trouver une équation du plan tangent à S_m

4) Déterminer m pour soit perpendiculaire à Q : $4x - 3y + z - 3 = 0$.