PROBLEME 1

A /On considère les fonctions f et g définies respectivement sur IR+ et $[1,+\infty[$ par : $f(x)=\text{Log}(x+\sqrt{x^2+1})$ et $g(x) = \text{Log}(x+\sqrt{x^2-1})$.

1°/Etudier les variations de f et de g.

2°/On désigne par (ξ) et (ξ ’) les courbes représentatives de f et de g dans le plan muni d’un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a-Etudier la position de (ξ) et (ξ ’) sur $[1,+\infty[$.

b-Tracer les courbes (ξ) et (ξ ’).

3°/Calculer l’aire de la partie du plan limitée par les courbes (ξ) et (ξ ’) et les droites d‘équations respectives : x = 1 et x = 2.

B/ 1°/a-Montrer que f réalise une bijection de IR+ sur un intervalle que l’on précisera.

b-Montrer que g réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle que l’on précisera.

2°/a-Montrer que pour tout $x \in IR+$: $\frac{1}{2}(e^{f(x)} - e^{-f(x)})=x$ et que pour tout $x\in[1,+\infty[$: $\frac{1}{2}(e^{g(x)} + e^{-g(x)})=x$.

b-Déterminer alors $f^{-1}(x)$ et $g^{-1}(x)$.

3°/On considère la fonction h définie sur $[0,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{f^{-1}(x)}{g^{-1}(x)}$.

a-Montrer que pour tout $x \geq 0$: $h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ et que $h^2(x) < 1$.

b-Calculer l’intégrale : $I=\int_0^{\text{Log}\sqrt{2}} h(t)dt$.

4°/a-Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$: $h'(x) = 1 - h^2(x)$.

b-Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} et vérifier que $h^{-1}(0) = 0$.

c-Montrer que h^{-1} est dérivable sur $[0,1[$ et que pour tout $x\in[0, 1[$: $(h^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

5°/En remarquant que : $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2(1+x)} + \dfrac{1}{2(1-x)}$, Calculer $h^{-1}(x)$ pour tout $x\in[0, 1[$.

C/ 1°/Soit n un entier naturel non nul , On définit sur $[0,+\infty[$ les fonctions F_n par :

$$F_0(x) = \int_0^x dt \text{ et pour tout } n \geq 1 : F_n(x)=\int_0^x (h(t))^n dt.$$

a-Justifier l’existence des fonctions F_n.

b-Montrer que pour tout $n\in IN^*$ et $x\in [0,+\infty[$: $F_n(x) \leq x(h(x))^n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)=0$.

2°/a-En utilisant B-4°/a) , Montrer que pour tout $n\geq 2$: $F_n(x) - F_{n-2}(x) = -\dfrac{1}{n-1}(h(x))^{n-1}$.

b-Montrer que pour tout $n \geq 1$: $F_{2n}(x)=x-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k-1}(h(x))^{2k-1}$ et que $F_{2n+1}(x)=\int_0^x h(t)dt-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k}(h(x))^{2k}$.

3°/On définit sur IN* les suites (U_n) et (V_n) par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)3^{2k-1}} \text{ et } V_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k3^{2k}}.$$

a-Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\text{Log}\sqrt{2}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=\text{Log}(\dfrac{3}{2\sqrt{2}})$.

b-En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{1}{k2^k}$.

PROBLEME :2

Partie :A

Soit $n \in IN$ tel que $n \geq 2$ et f_n la fonction définie sur IR par : $f_n(x) = \dfrac{x^n}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$

$f_n(0) = 0$

et (C_n) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/a-Montrer que f_n est continue en 0.

b-Etudier la dérivabilité de f_n en 0 (On distinguera les cas $n = 2$ et $n > 2$).

2°/Soit h_n définie sur IR par : $h_n(x) = (n - x)e^x - n$.

a-Dresser le tableau de variation de h_n.

b-Vérifier que pour tout $n \geq 2$: $e^{n-1} - n > 2$. Déduire que l'équation $h_n(x) = 0$ admet dans IR deux solutions 0 et α_n et que : $n - 1 < \alpha_n < n$.

c-Dresser , suivant la parité de n, le tableau de variation de f_n.

3°/a-Montrer que $f_n(\alpha_n) = \alpha_n^{n-1}(n - \alpha_n)$.

b-Tracer la courbe (C_2) de la fonction f_2 (On précisera la tangente en 0) et on prendra $\alpha_2 \approx 1,6$).

Partie :B

On pose pour $n \geq 2$: $I_n = \displaystyle\int_{Log2}^{1} f_n(x)dx$.

1°/Montrer que (I_n) est décroissante.

2°/En déduire qu'elle est convergente.

3°/a-Montrer que pour tout $n \geq 2$: $\dfrac{1}{e-1}\left[\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{(Log2)^{n+1}}{n+1}\right] \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{(Log2)^{n+1}}{n+1}$

b-Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Partie : C

Soit F la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_{Logx}^{2Logx} f_2(t)dt$

1°/a-Montrer que pour tout $x \in]1, \sqrt{e}[$ il existe un réel $c \in [Logx , 2Logx]$ tel que : $F(x) = \dfrac{c^2}{e^c - 1}Logx$

et que $\dfrac{(Logx)^3}{(x-1)^2} \leq \dfrac{F(x)}{x-1} \leq \dfrac{4(Logx)^3}{(x-1)^2(x+1)}$.

b-Montrer alors que F est dérivable à droite en 1 et calculer $F_d'(1)$.

2°/a-Montrer que F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $F'(x) = \dfrac{(Logx)^2}{x(x^2-1)}(7 - x)$.

b-Montrer que pour tout $x \geq e^2$: $\dfrac{4(Logx)^3}{x^2 - 1} \leq F(x) \leq \dfrac{(Logx)^3}{x-1}$.

c-Dresser le tableau de variation de F (On ne calculera pas F(7)).

PROBLEME :3

A)On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = (1 + x)e^{-2x}$ et on note (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/Etudier les variations de f.

2°/a-Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

b-Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = f(x) + x + 1$. Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ et en déduire le signe de $g'(x)$.

c-Etudier la position relative de (T) et (C).

3°/Tracer (T) et (C).

B)Pour tout entier naturel non nul n on considère la fonction f_n définie sur IR par $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n e^{-2x}$ et on note (C_n) sa courbe dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/Etudier , pour $n \geq 2$, les variations de f_n (on distinguera les cas n pair et n impair).

2°/Montrer que toutes les courbes (C_n) passet par un point fixe A que l'on déterminera et qu'elles admettent en ce point une tangente commune dont on donnera une équation cartésienne.

3°/a-Etudier la position des courbes (C_1) et (C_2).

b-Tracer (C_1) et (C_2).

4°/Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (C_1) , (C_2) et les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 1$.

C)Pour tout entier naturel non nul n on pose $I_n = \int_0^n f_n(t)dt$.

1°/Interpréter géométriquement le réel I_n.

2°/a-Montrer que pour tout réel positif t : $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$.

b-En déduire que pour tout réel positif x : $x - \frac{x^2}{2} \leq \text{Log}(1+x) \leq x$ et que $x - \frac{x^2}{2n} \leq n\text{Log}(1+\frac{x}{n}) \leq x$

c-Montrer alors que : $\int_0^n e^{-x-\frac{x^2}{2n}} dx \leq I_n \leq 1 - e^{-n}$.

3°/a-Montrer que pour tout réel positif x : $1 - x \leq e^{-x}$.

b-En déduire que pour tout réel positif x : $1 - \frac{x^2}{2n} \leq e^{-\frac{x^2}{2n}}$ et que $\int_0^n e^{-x-\frac{x^2}{2n}} dx \geq \int_0^n (e^{-x} - \frac{x^2}{2n}e^{-x})dx$

c-Déduire alors que : $I_n \geq 1 - \frac{1}{n} + (\frac{1}{n} + \frac{n}{2})e^{-n}$

4°/Montrer que la suite (I_n) est convergente et calculer sa limite.

PROBLEME :4

Partie :A

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = (x + \frac{3}{2})e^{-x} - \frac{1}{2}$ si $x \leq 0$

$$f(x) = \frac{\text{Log}(1+x)}{x} \text{ si } x > 0$$

et on désigne par (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité = 2 cm.

1°/a-Montrer que f est continue sur IR.

b-Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty , 0]$ et $] 0 , +\infty [$ et calculer $f'(x)$ sur chacun de ces intervalles.

2°/a-Montrer que pour tout réel, positif t : $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$.

b-Déduire que pour tout réel positif x : $x - \frac{x^2}{2} \leq \text{Log}(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

c-Montrer alors que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

3°/Soit h la fonction définie sur IR+ par $h(x) = \frac{x}{1+x} - \text{Log}(1+x)$.

a-Etudier les variations de h et en déduire le signe de h(x).

b-Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe (C) et la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

c-Calculer en cm² l'aire de la partie du plan limitée par (C) et les droites : $y = 0$, $x = -1$ et $x = 0$.

4°/Pour tout réel positif x on pose : $F(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$.

a-Montrer que F est dérivable sur IR+ et que $F'(x) = f(x+1) - f(x)$.

b-Donner le sens de variation de F.

c-Montrer que pour tout réel positif x il existe $c \in]x, x+1[$ tel que $F(x) = f(c)$. Déduire alors la limite de F en $+\infty$.

Partie :B

On désigne par g la restriction de f sur l'intervalle [0 , 1] et $I = \int_0^1 g(x)dx$.

1°/a-Montrer que pour tout réel positif t et que pour tout $n \in$ IN* :

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}$$

b-En déduire que pour tout réel $x \in [0 , 1]$ et pour tout $n \in$ IN* :

$$\text{Log}(1+x) = P_n(x) + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt \text{ avec } P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

2°/On pose pour $n \in$ IN* : $U_n = \int_0^{\frac{1}{n}} g(x)dx$ et $V_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 g(x)dx$.

a-Vérifier que pour tout $x \in [0 , 1]$: $\text{Log}2 \leq g(x) \leq 1$.

b-Déduire que : $\frac{\text{Log}2}{n} \leq U_n \leq \frac{1}{n}$.

c-Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

3°/a-Montrer que pour tout $x \in [0 , 1]$: $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt \leq \frac{1}{n+1}$.

b-En déduire que pour tout $x \in]0 , 1]$: $\left| g(x) - \frac{P_n(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{(n+1)x}$.

4°/On pose pour $n \in$ IN* : $S_n(x) = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2}$.

a-Montrer que pour tout $n \in$ IN* :

$$V_n + S_n(\frac{1}{n}) - \frac{\text{Log}n}{n+1} \leq S_n(1) \leq V_n + S_n(\frac{1}{n}) + \frac{\text{Log}n}{n+1}$$

b-Vérifier pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $k \in$ IN* : $\frac{x^k}{k^2} \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}$.

c-En déduire que pour tout réel $x \in [0, 1]$ et pour tout $n \in$ IN* : $0 \leq S_n(x) \leq x$.

(On distinguera les cas n pair et impair).

d-Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\frac{1}{n})$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(1)$.

PROBLEME :5

A/O considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^{2x}}$ et on note (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/a-Vérifier que f est une fonction paire.

b-Dresser le tableau de variation de f .

c-Tracer sa courbe (C).

2°/Soit h la restriction de f à IR+.

a-Montrer que h réalise une bijection de IR+ su un intervalle J que l'on précisera.

b-Calculer $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

c-Tracer la courbe de h^{-1} dans le même repère.

B/Soit F la fonction définie sur IR par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

1°/Montrer que F est impaire.

2°/Soit G la fonction définie sur $]\, 0, \frac{\pi}{2}\, [$ par $G(x) = F(\mathrm{Log}(\mathrm{tg}x))$.

a-Montrer que G est dérivable sur $]\, 0, \frac{\pi}{2}\, [$ et calculer G'(x).

b-Montrer que $\forall\, x \in]\, 0, \frac{\pi}{2}\, [: G(x) = x - \frac{\pi}{4}$.

3°/a-Calculer l'intégrale : $I = \int_0^{\mathrm{Log}\sqrt{3}} f(t)dt$.

b-En déduire que : $\int_{\mathrm{Log}\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\mathrm{Log}\sqrt{3}} f(t)dt = \frac{\pi}{6}$.

C/soit $n \in IN^*$, On considère la fonction H_n définie par : $H_n(x) = \int_{\frac{1}{e}}^{f(x)} (1 + \mathrm{Log}t)^n dt$.

1°/Montrer que H_n est définie sur IR et qu' elle est paire.

2°/a-Montrer que pour tout réel $t > 0 : 1 + \mathrm{Log}t \leq t$.

b-En déduire que quelque soit $n \in IN^*$: $0 < H_n(o) \leq \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n(0)$.

3°/Calculer $H_1(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} H_1(x) = \dfrac{1}{e}$.

4°/a-Montrer , à l'aide d'une intégration par parties, que $\forall\, n \in IN^*$:

$$H_{n+1}(x) = f(x)[1 + \mathrm{Log}f(x)]^{n+1} - (n+1)H_n(x).$$

b-Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} x(1 + \mathrm{Log}x)^n = 0$.

c- Montrer, par récurrence , que H_n admet une l imite finie et non nulle lorsque x tend vers $+\infty$.

(On notera L_n cette limite).

d-Montrer que pour tout $n \in IN^*$: $L_{n+1} = -(n+1)L_n$ et que $L_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n!}{e}$.

PROBLEME 6

A/ On considère la fonction f définie sur IR+ par : $f(x)=\text{Log}(x+\sqrt{x^2+1})$

1°/Etudier les variations de f .

2°/On désigne par (ξ) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a-Tracer la courbe (ξ).

b-Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (ξ) et les droites d'équations respectives : $x = 1$, $x = 2$ et $y = 0$.

3°/a-Montrer que f réalise une bijection de IR+ sur un intervalle que l'on précisera.

b-Montrer que pour tout $x \in$ IR+ : $\frac{1}{2}(e^{f(x)} - e^{-f(x)}) = x$.

c-Déterminer alors $f^{-1}(x)$.

B / On considère la fonction h définie sur $[0,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1°/a-Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$: $0 \le h^2(x) < 1$.

b-Calculer l'intégrale : $I = \int_0^{\text{Log}\sqrt{2}} h(t)dt$.

2°/a-Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$: $h'(x) = 1 - h^2(x)$.

b-Dresser le tableau de variation de h.

c-Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} et vérifier que $h^{-1}(0) = 0$.

d-Montrer que h^{-1} est dérivable sur $[0,1[$ et que pour tout $x \in [0, 1[$: $(h^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

3°/En remarquant que : $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2(1+x)} + \dfrac{1}{2(1-x)}$, Calculer $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$.

C/ 1°/Soit n un entier naturel non nul , On définit sur $[0,+\infty[$ les fonctions F_n par :

$F_0(x) = \int_0^x dt$ et pour tout $n \ge 1$: $F_n(x) = \int_0^x (h(t))^n dt$.

a-Justifier l'existence des fonctions F_n.

b-Montrer que pour tout $n \in$ IN* et $x \in [0,+\infty[$: $F_n(x) \le x(h(x))^n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$.

2°/a-En utilisant B-2°/a) , Montrer que pour tout $n \ge 2$: $F_n(x) - F_{n-2}(x) = -\dfrac{1}{n-1}(h(x))^{n-1}$.

b-Montrer que pour tout $n \ge 1$: $F_{2n}(x) = x - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1}(h(x))^{2k-1}$ et que $F_{2n+1}(x) = \int_0^x h(t)dt - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k}(h(x))^{2k}$.

3°/On définit sur IN* les suites (U_n) et (V_n) par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)3^{2k-1}} \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k3^{2k}} .$$

a-Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \text{Log}\sqrt{2}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \text{Log}(\dfrac{3}{2\sqrt{2}})$.

b-En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k3^k}$.

PROBLEME 7

A°/ Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ f(x) = 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On note ξ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, unité graphique 2 cm.

1°/a-Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

b-Dresser le tableau de variation de f.

2°/a-Etudier les variations de la fonction u définie sur $]-1,+\infty[$ par $u(x) = f(x) - x$.

b-Déduire la position de (ξ) par rapport à la droite (Δ): $y = x$.

c-Tracer (ξ) et (Δ).

3°/a-Montrer que f réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b-Soit g la fonction réciproque de f. Expliciter $g(x)$ pour tout x dans J.

c- Tracer ξ_g dans le même repère.

d-Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par ξ, ξ_g et les droites $x = 1$ et $y = 1$.

B°/ On pose pour tout $n \geq 1$: $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} + \dots + \frac{1}{(2n-1).2^{2n-1}}$ et $R_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{x^{2n}}{1-x^2}\,dx$.

1°/a-Montrer que pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, 0]$ on a : $x^{2n} \leq \frac{x^{2n}}{1-x^2} \leq \frac{4x^{2n}}{3}$.

b-En déduire que pour tout $n \geq 1$ on a : $\frac{1}{(2n+1)\,2^{2n+1}} \leq R_n \leq \frac{1}{3\,(2n+1)\,2^{2n-1}}$.

c-Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n$.

2°/a-Montrer que pour tout $x \in]-1, 0]$ on a : $f'(x) = 1+x^2+x^4+\dots+x^{2n-2}+\frac{x^{2n}}{1-x^2}$

b-En déduire que (S_n) est convergente et calculer sa limite.

C°/ Soit n un entier naturel non on pose : $u_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ et $I_n = \int_0^{1-\frac{1}{n}} g(x)\,dx$.

1°/a-Vérifier que pour tout $n \geq 2$ on a : $u_n = \sqrt[n]{\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}}$.

b-En déduire que pour tout $n \geq 2$ on a : $\operatorname{Log} u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} g(\frac{k}{n})$.

2°/a-Montrer que pour tout $k \in \{0,1,2,\dots,n-2\}$ on a :

$$\frac{1}{n}g(\frac{k}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g(x)\,dx \leq \frac{1}{n}g(\frac{k+1}{n}).$$

b-En déduire que pour tout $n \geq 2$ on a : $\operatorname{Log} u_n + \frac{1}{n}\operatorname{Log}\frac{1}{n} \leq I_n \leq \operatorname{Log} u_n$.

3°/a-Calculer I_n en fonction de n.(on remarquera que pour $x \neq 1$: $\frac{x}{1-x} = -x + \frac{1}{1-x}$)

b-En déduire que pour tout $n \in IN^*$: $1-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\operatorname{Log}\frac{1}{n} \leq \operatorname{Log} u_n \leq 1-\frac{1}{n}$

c-Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

PROBLEME 8

Partie A :

soit f la fonction définie sur l'intervalle I = $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ par f(x) = $\sqrt{1+\text{tg}x}$ et (ξ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\ \vec{i},\vec{j})$.

1°/a-Montrer que f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ et calculer f ' (x).

b-Etudier la dérivabilité de f à droite en $-\frac{\pi}{4}$ et interpréter graphiquement ce résultat.

2°/Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe.

3°/a-Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

b-Soit g la fonction réciproque de f . Calculer g(0) , g(1) et g($\sqrt{2}$).

c-Tracer la courbe (ξ ') de g dans le même repère que (ξ).

4°/Montrer que g est dérivable sur J et que pour tout $x\in J$: g'(x) = $\frac{2x}{x^4-2x^2+2}$.

5°/Soit (U_n) la suite définie sur IN par $U_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} g(k)$.

a-Montrer que pour tout $n\in$ IN : $g(n) \le U_n \le g(2n)$.

b-En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Partie B :

Soit h la fonction définie sur IR_+ par : h(x) = $\frac{1}{2}g(\sqrt{1+\frac{1}{x}})$ si x > 0.

$$h(0)= \frac{\pi}{4}\ .$$

1°/a-Montrer que h est continue sur IR_+ .

b-Montrer que h est dérivable sur IR^*_+ et que h'(x) = $-\frac{1}{2(x^2+1)}$.

2°/a-Soit x un réel strictement positif . En utilisant le théorème d'accroissement finis montrer qu'il existe un réel c $\in]0,x[$ tel que $h(a)-\frac{\pi}{4}=-\frac{x}{2(c^2+1)}$.

b-En déduire que h est dérivable à droite en 0 et que $h'_d(0) = -\frac{1}{2}$.

c-Dresser le tableau de variation de h.

3°/a-Montrer que l'équation h(x) = x admet dans IR_+ une solution unique α et que $\alpha \in]0,1[$.

b-Montrer que pour tout x dans IR_+ : $|h'(x)| \le \frac{1}{2}$.

4°/Soit (V_n) la suite définie sur IN par : V_0 un réel positif différent de α et pour tout entier naturel n : V_{n+1} = h(V_n).

a-Montrer que pour tout $n\in$ IN : $|V_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}|V_n-\alpha|$.

b-En déduire que (V_n) est convergente et calculer sa limite.

PROBLEME 9

Soit f la fonction définie sur I = $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ par : f(x) = $\frac{1}{1-\text{tg}x}$ si $x \ne -\frac{\pi}{2}$.

$$f(-\frac{\pi}{2}) = 0.$$

1°/a-Montrer que f est continue sur I.

b-Etudier la dérivabilité de à droite en $(-\frac{\pi}{2})$.

c-Dresser le tableau de variation de f.

2°/a-Montrer que f réalise une bijection de I sur $[\,0\,,+\infty\,[$. On note g sa fonction réciproque.

b-Tracer dans le même repère les courbes de f et de g.

c-Montrer que g est dérivable sur $[\,0\,,+\infty\,[$ et que pour tout $x > 0$: $g'(x) = \frac{1}{2x^2-2x+1}$.

3°/a-Soit $n\in IN$. Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une solution unique x_n .

b-Déterminer x_0 et x_1.

c-Montrer que la suite (x_n) est strictement croissante puis qu'elle est convergente.

d-Montrer que pour tout $n\in IN^*$: $tg(x_n) = 1 - \frac{1}{n}$. Déduire la limite de (x_n).

4°/On pose $\varphi(x)=g(\frac{1+tgx}{2})$ pour $x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$.

a-Montrer que φ est dérivable sur $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ et que $\varphi'(x) = 1$.

b-Montrer que la fonction : $x \mapsto \varphi(x) - x$ est constante sur $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ et déterminer cette constante.

c-Montrer que pour tout $n\in IN^*$: $x_n = g(1-\frac{1}{2n})+\frac{\pi}{4}$.

d-Retrouver alors la limite de (x_n).

5°/Soient h et k les fonctions définies sur $[\frac{1}{2},+\infty[$ par $h(x)=\frac{2x-1}{2x}$ et $k(x) = g(\,1-\sqrt{h(x)}\,)$.

a-Déterminer l'image de $[\frac{1}{2},+\infty[$ par h.

b-Montrer que k est continue sur $[\frac{1}{2},+\infty[$.

c-Montrer que k réalise une bijection de $[\frac{1}{2},+\infty[$ sur $]-\frac{\pi}{2},0]$

et que pour tout $x\in]-\frac{\pi}{2},0]$: $k^{-1}(x)=\frac{1}{2}(\frac{(1-tgx)^2}{1-2tgx})$.

PROBLEME 10

Partie :A

On considère les fonctions f définie sur $]\,0, 4\,[$ par $f(x) = \frac{2x-4}{\sqrt{4x-x^2}}$ et (ξ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i},\vec{j})$.

1°/a-Montrer que f est dérivable sur $]\,0, 4\,[$ et calculer $f'(x)$.

b-Dresser le tableau de variation de f.

2°/a-Montrer que f réalise une bijection de $]\,0\,,4\,[$ sur IR.

b-Soit g la fonction réciproque de f . Monter que pour tout $x\in IR$: $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{4+x^2}}+2$.

3°/Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]\,0\,,4\,[$ une solution unique α et que $\alpha > 2$.

4°/a-Ecrire une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 2 .

b-Etudier la position relative de (T) et (ξ).

c-Tracer (T) , (ξ) et (ξ') la courbe de g .

Partie :B

Soit (U_n) la suite définie sur IN par : U_o un réel supérieur strictement à α et pour tout $n \in IN$:

$U_{n+1} = g(U_n)$.

1°/Déterminer le signe de $g(x) - x$ pour $x \in IR$.

2°/Etudier le sens de variation de (U_n).

3°/Montrer que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Partie :C

Soit h la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par : $h(x) = \frac{2}{g(2tgx)}$ si $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$$h(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}.$$

1°/Montrer que pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: $h(x) = \frac{1}{1+\sin x}$.

2°/Montrer que réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3°/Soit h^{-1} la réciproque de h

a-Calculer $h^{-1}(2)$ et $h^{-1}(2 + \sqrt{2})$.

b-Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur J et déterminer sa fonction dérivée .