Similitudes

4 ^{eme} maths

Exercice 1

Dans le plan orienté P, on donne un triangle rectangle OAB tel que OA=2OB et $\widehat{\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit I et J les milieux respectifs de $[OA]$ et $[OB]$.

1. Soit S la similitude directe transformant O en A et B en O.

- **a.** Déterminer le rapport et un angle de S.
- **b.** Montrer que le centre Ω de S est le projeté orthogonal de O sur (AB)
- **c.** Montrer que S transforme I en J
  En déduire que les droites (ΩI) et (ΩJ) sont perpendiculaires.

2. La perpendiculaire à (OA) en A, coupe (ΩJ) en un point C.

- **a.** Montrer que $S((OA)) = (AC)$
- **b.** Déterminer alors S(I).
- **c.** Montrer que le cercle de diamètre $[IC]$ passe par Ω.

3. Soit Σ la similitude indirecte qui transforme A en O et B en O.
On désigne par ω le centre de Σ.

- **a.** Déterminer l'image du point B par $\Sigma \circ \Sigma$.
- **b.** En déduire que $\omega \in (AB)$.
- **c.** Montrer que Σ transforme Ω en son symétrique Ω' par rapport à la droite (OA).(on pourra utiliser l'application $\Sigma \circ S^{-1}$)
- **d.** Montrer que $\omega \in (O\Omega')$. Construire ω ainsi que l'axe Δ de Σ.

Exercice 2

Dans le plan orienté P, on donne un carré ABCD de centre O tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par I, J et K les milieux respectifs de $[AB],[AD]$ et $[CD]$.

1.
- **a.** Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A en B et D en A.
- **b.** Déterminer les éléments caractéristiques de f.

c. Montrer que l'antidéplacement g transformant A en B et D en A est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

2. Soit S la similitude directe qui envoie A en D et B en J.

a. Déterminer l'angle et le rapport de S.

b. Construire le centre Ω de S.

c. Déterminer $S((AC))$ et $S((BC))$.
En déduire que le triangle $O\Omega C$ est rectangle

d. Déterminer l'image du carré ABCD par S.

e. Montrer que les points A, Ω et K sont alignés.

Exercice 3

Dans le plan orienté $\mathcal{P}$, on considère un triangle isocèle ABC tel que $AB = AC$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$. Soit D le point de $\mathcal{P}$ tel que le triangle CDA soit rectangle isocèle et $\left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

1. Reporter l'énoncé sur une figure que l'on complétera à fur et à mesure

2. Soit R_A la rotation de centre A et transformant B en C et R_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On pose $f = R_C \circ R_A$

a. Déterminer et placer $f(A)$ et $f(B)$ sur la figure

b. Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre noté O. Placer O sur la figure.

c. Quelle est la nature du quadrilatère ABOC.

3. On pose $g = f \circ S_{(BC)}$.

a. Quelle est la nature de l'application g.

b. Déterminer $g(A)$ et $g(B)$.

4. On note H le milieu de $[BC]$; $C' = g(C)$ et $H' = g(H)$.

a. Montrer que H' est le milieu de $[OD]$.

b. Construire H' puis C'.

c. Donner la forme réduite de g.

Exercice 4

Dans le plan orienté $\mathcal{P}$, on donne deux points A et B et O le milieu de $[AB]$.

Soit Γ l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que

$\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

La médiatrice Δ de $[AB]$ coupe Γ en un point I.

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et passant par A coupe la demi droite $[OI)$ en D.

La droite (BD) coupe Γ en K et la droite (AI) recoupe $\mathcal{C}$ en E.

Soit S la similitude directe de centre A telle que $S(O) = I$.

1. a. Déterminer le rapport k et une mesure θ de l'angle de S.
   b. Déterminer S(B).
2. a. Montrer que le triangle ADK est rectangle et isocèle
   b. En déduire S(K) puis déterminer l'image de la droite (BD) par S.
3. Soit g la similitude indirecte de centre D telle que $g(A) = K$.
   a. Déterminer le rapport et l'axe de g.
   b. Caractériser l'application $g \circ g$.
   c. En déduire $g(K)$
4. Soit $f = g \circ S$.
   a. Préciser $f(A)$ et $f(K)$.
   b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 5

ABC est un triangle équilatéral direct inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Soit I le point diamètralemnt opposé à C sur $\mathcal{C}$.

1. Montrer que le triangle OAI est équilatéral direct.
2. Soit f la similitude directe telle que $f(I) = O$ et $f(C) = B$
   a. Déterminer le rapport et l'angle de f.
   b. Montrer que le centre Ω de f est un point commun des cercle circonscrits aux triangle OAI et OBC
   Constrtuire Ω
   c. Montrer que $f[(AI)] = (OA)$ et $f[(AC)] = (BC)$.
   d. En déduire que l'image A' de A par f est le milieu de $[BC]$.
3. Soit R la rotation de centre O et telle que $R(A) = C$ et h l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$.
   Montrer que $f = h \circ R$
4. Soit g la similitude indirecte telle que $g(I) = O$ et $g(C) = B$. On note J son centre.
   a. Déterminer le rapport de g.

b. Montrer que $g(B) = A'$ et que $\overrightarrow{JC} = 4\overrightarrow{JA'}$

c. Montrer que l'axe Δ de g est la droite perpendiculaire à (BC) en J.

Exercice 6

Dans le plan orienté P on considère un triangle équilatéral direct ABC.

On désigne par R_A, R_B et R_C les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs A, B et C.

On note $D = R_B(A)$ et $E = R_C(D)$.

1. Démontrer que $R_C \circ R_B \circ R_A$ est la symétrie centrale de centre B.
2. Soit S la similitude directe de rapport $\frac{1}{2}$, d'angle $\frac{-2\pi}{3}$ et transformant A en B.
   - **a**. Calculer le rapport $\frac{BD}{AE}$ ainsi qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{BD}\right)$.
   - **b**. En déduire que $S(E) = D$.
3. On note Ω le centre de S.
   - **a**. Montrer que les points Ω, A, B et C d'une part et les points Ω, D, B et E d'autre part sont cocycliques.
   - **b**. Construire le point Ω.
4. **a**. Démontrer que S transforme la droite (AC) en (BC).
   - **b**. Démontrer que l'image du cercle circonscrit au triangle ACE par S est le cercle de diamètre $[BD]$.
   - **c**. En déduire que S transforme le point C en le milieu I de $[DE]$.
5. Soit $S_{(A\Omega)}$ la réflexion d'axe $(A\Omega)$ et $f = S \circ S_{(A\Omega)}$.
   - **a**. Montrer que f est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.
   - **b**. Déterminer $f(\Omega)$ et $f(A)$. En déduire la forme réduite de f.
   - **c**. Déterminer la nature de l'application $f \circ f$.

Soit ABC un triangle quelconque du plan orienté. On désigne par :

- R_1 la rotation de centre A et d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$
- R_2 la rotation de centre B et d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}\right)$
- R_2 la rotation de centre C et d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right)$

Soit Δ_1, Δ_2 et Δ_3 les bissectrices intérieures respectives des angles géométriques $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$

Soit I le point d'intersection de ces droites.

Les reflexions d'axes Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont notées $S_{\Delta_1}, S_{\Delta_2}$ et S_{Δ_3}

1. Montrer que l'application $f = R_2 \circ R_3 \circ R_1$ est une rotation dont on précisera l'angle.