Suites réelles 4 A

Exercice N°1

On considère la suite réelle (u) définie par : $u_n = \frac{3^n}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que pour tout n∈ IN * : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.
2) En déduire que la suite (u) est croissante.

Exercice N°2

a un réel strictement positif.

On considère la suite réelle (u) définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}(1+a) \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}) \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout n∈ IN : $u_n \geq \sqrt{a}$.
2) Montrer que la suite (u) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.
3) Déterminer sa limite.

Exercice N°3

On considère les suites réelles (a_n) et (b_n) définies par : $\begin{cases} a_0 = a \\ b_O = b \\ a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \\ b_{n+1} = \frac{b_n^2}{a_n + b_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Montrer que pour tout n∈ IN : $a_n > 0$ et $b_n > 0$.

b) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont décroissantes. Conclure.

2) On considère les suites réelles (u) et (v) définies par :

$u_n = a_n - b_n$ et $V_n = = \frac{a_n}{b_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Etudier la suite (u).

b) Calculer v_n en fonction de a, b et n et en déduire la limite de la suite (v_n).

c) Déterminer alors les limites de la suite (a_n) et la suite (b_n) .

Exercice N°4

1) Soit (u) la suite réelle définie par : $\begin{cases} u_1 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\\ u_{n+1} = u_n(1-u_n) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$: $0 < u_n < \frac{1}{2}$.

b) Montrer que la suite (u) est convergente.

c) Montrer que pour tout $n \in IN^*$: $u_n < \frac{1}{n+1}$.

(On pourra utiliser les variations de la fonction f définie sur $[0 , \frac{1}{2}[$ par f(x) = x(1- x)).

d) Trouver alors la limite de la suite (u).

2) Soit (v) la suite définie par : pour tout $n \in IN^*$: $v_n = n\, u_n$.

Montrer que la suite (v) est croissante et qu'elle est convergente.

Exercice N°5

Soit (u) la suite réelle définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4u_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Montrer que la suite (u) est majorée par 4.

b) Montrer que la suite (u) est croissante et en déduire qu'elle converge. Déterminer sa limite.

2) a) Montrer que : $(4-u_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(4-u_n) \ \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Retrouver la limite de la suite (U_n) .

c) Etudier la convergence de la suite (V_n) définie par $V_n = n^2 (4 - U_n)$.